PROBLEMAS DE GEOMETRÍA

Volumen 1

Gerard Romo Garrido



Toomates Cool·lección

Los documentos de **Toomates Cool·lección** son recopilaciones de materiales matemáticos, redactados, ordenados y sistematizados por **Gerard Romo**, con el objetivo de que puedan ser útiles para cualquier estudioso de las matemáticas.

"**Always Under Construction**": Debido a lo ambicioso del proyecto, estos documentos se van ampliando, corrigiendo y completando a lo largo de los años.

Se agradecerá cualquier observación, comentario, rectificación o colaboración a
toomates@gmail.com

Todos los documentos se ofrecen en dos versiones: En formato "**pdf**" para una cómoda lectura y en el formato "**doc**" de MSWord para permitir y facilitar su edición.

Actualmente Toomates Cool·lección consta de los siguientes documentos:

Geometría axiomática:

Geometría Axiomática pdf doc1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13
Problemas de Geometría (Vol. 1) pdf doc
Problemas de Geometría (Vol. 2) pdf doc

Matemáticas para el bachillerato (en catalán):

Àlgebra Lineal Batxillerat pdf doc
Geometria Lineal Batxillerat pdf doc
Càlcul Infinitesimal Batxillerat pdf doc
Programació Lineal Batxillerat pdf doc

Problemarios:

Problemas de Matemáticas (Vol. 1) pdf doc
Cangur Integral (en catalán) pdf doc
Geometría Proyectiva Práctica pdf doc

Versión de este documento: 12/01/2018

www.toomates.net

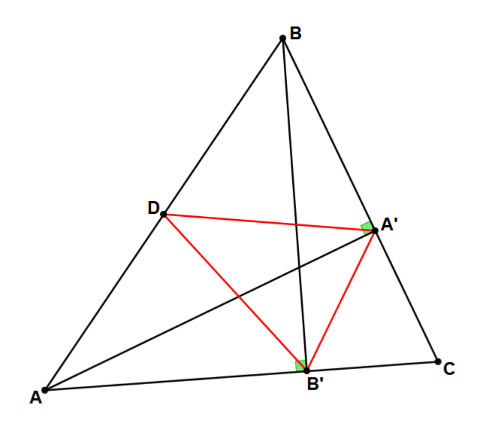
Índice.

Accede a
www.toomates.net/biblioteca/GeometriaAxiomatica.pdf

para descargar gratuitamente el libro de teoría que complementa este problemario.

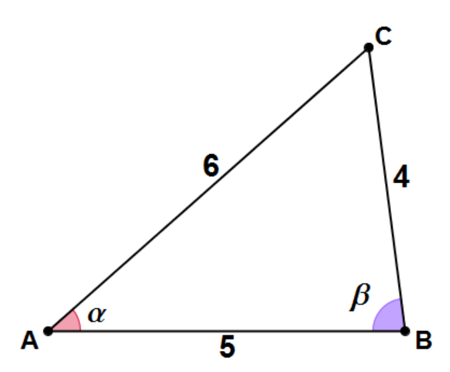
1. Triángulo isósceles con alturas y punto medio.

En un triángulo ΔABC, sea D el punto medio del segmento $\overline{AB}$ y sean $\overline{AA'}$ y $\overline{BB'}$ alturas. Demostrar que $\Delta DA'B'$ es isósceles.



2. Ángulo doble en un triángulo 4-5-6.

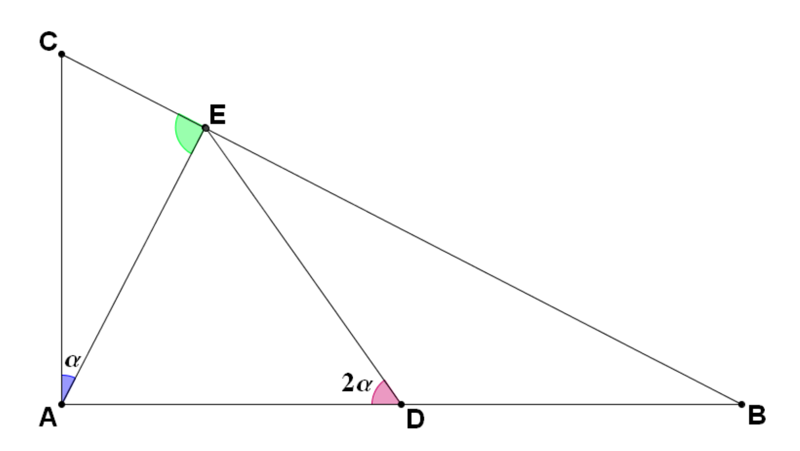
Dado un triángulo de lados 4, 5 y 6, demostrar que el ángulo mayor es el doble del ángulo menor.



Fuente: https://www.cut-the-knot.org/m/Geometry/456Triangle.shtml

3. Ángulo doble en un triángulo rectángulo.

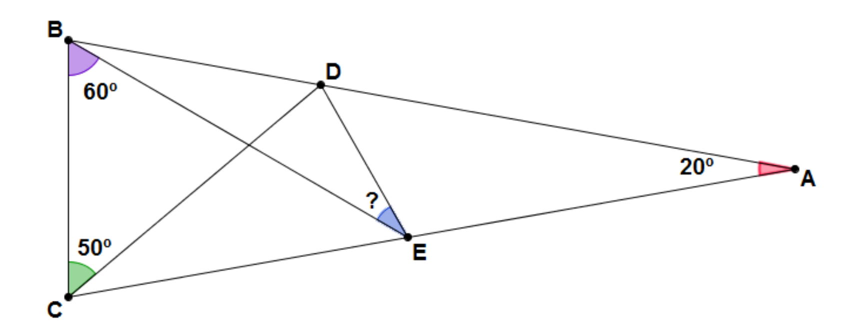
En un triángulo rectángulo ΔABC, sea D el punto medio de $\overline{AB}$ y E un punto de la hipotenusa $\overline{BC}$ de forma que $\angle ADE = 2\angle CAE$. Demostrar que $\angle AEC$ es recto.



Fuente del enunciado: www.gogeometry.com

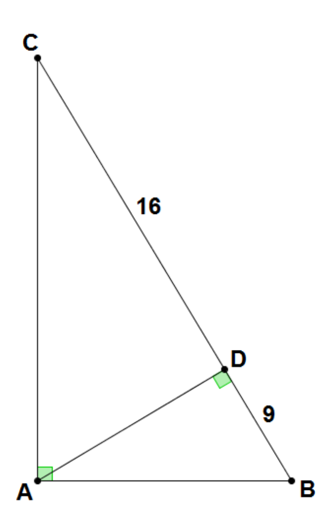
4. "El más difícil de los problemas fáciles".

En el siguiente triángulo isósceles, encontrar el ángulo señalado.



5. Triángulo rectángulo con hipotenusa 16+9.

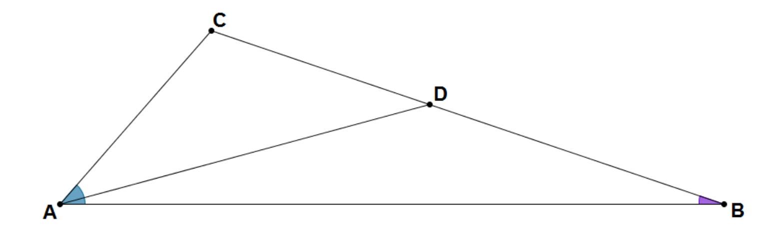
En un triángulo rectángulo, la altura sobre la hipotenusa divide a esta en dos segmentos de longitud 16 y 9. Determinar dicha altura y los dos catetos.



Nota 1: Este ejercicio apareció en las pruebas de admisión al MIT del año 1869.
Nota 2: Intenta resolver este problema sin plantear el evidente sistema de tres ecuaciones de segundo grado.

6. Triángulo con diferencia de ángulos igual a 30°.

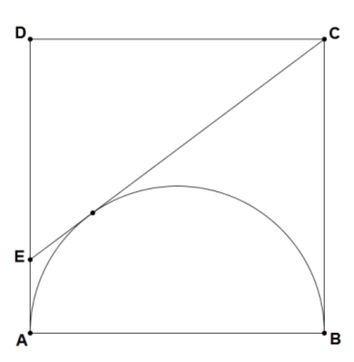
Sea ΔABC un triángulo con un punto D en BC tal que $AC = CD$, y cumpliendo $\angle CAB - \angle ABC = 30^{\circ}$. Determinar $\angle DAB$.



Fuente del enunciado: [Altizio] Ejercicio 2.

7. Recta tangente a semicircunferencia en un cuadrado.

En el interior de un cuadrado $\lozenge ABCD$ trazamos una semicircunferencia de lado AB. La recta que pasa por el vértice C y es tangente a la semicircunferencia cortará el lado AD en un punto E. Determinar la longitud CE.



Fuente del enunciado: [Altizio] Ejercicio 3. [AMC 10A 2004]

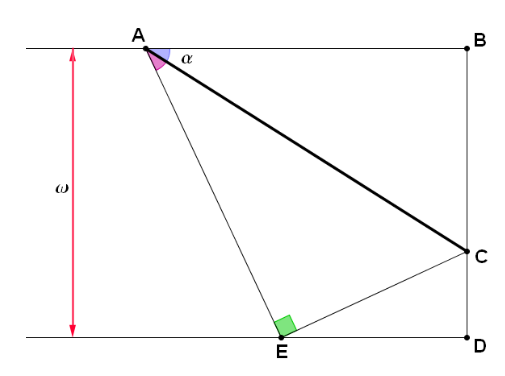
8. Razón de senos en un triángulo 4-5-6.

En ΔABC , $a = 4, b = 5, c = 6$. Determina $\dfrac{\sin 2A}{\sin C}$

Fuente del enunciado: Selectividad China 2017.

9. Doblez de un papel.

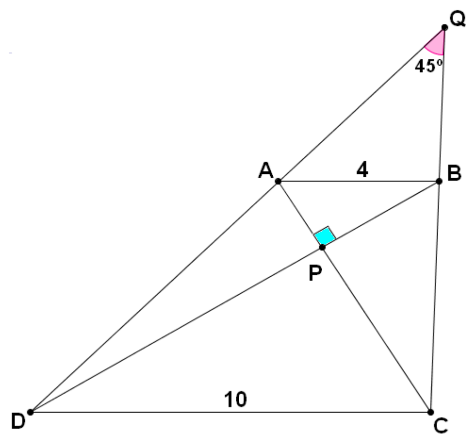
Doblamos una esquina de una hoja de papel rectangular hasta tocar el lado opuesto, tal y como se describe en el siguiente dibujo:



Determinar la longitud $|AC|$ en función del ángulo α y la anchura del papel ω.

10. Área trapecio 10-4-45º.

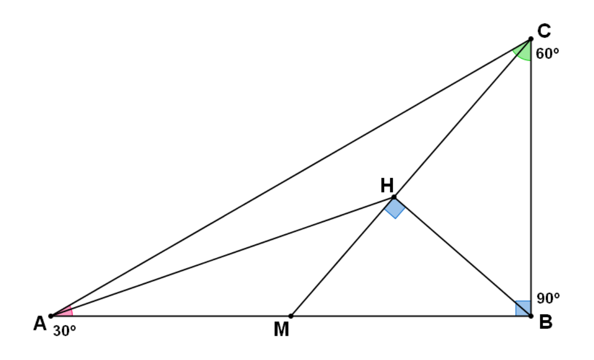
Sea $\lozenge ABCD$ un trapecio con $AB // CD$, $|AB| = 4$, $|CD| = 10$ y cuyas diagonales se cortan en ángulo recto en un punto P. Supongamos además que los dos lados opuestos AD y BC se cortan en un punto Q con un ángulo de 45º. Determina el área del trapezoide.



Fuente: [Altizio] Página 8.

11. Ángulos en un triángulo 30-60-90.

Sea ΔABC un triángulo rectángulo $\angle A = 30^{\circ}$, $\angle B = 90^{\circ}$, $\angle C = 60^{\circ}$. Sea M el punto medio de $\overline{AB}$ y H el punto del segmento $\overline{MC}$ tal que $\overline{MC} \perp \overline{BH}$.



Demostrar que $\angle AHC = 150^{\circ}$, $\angle AHB = 120^{\circ}$ y $\overline{AH} = 2\overline{HB}$.

12. Determinación de ángulos mediante trigonometría.

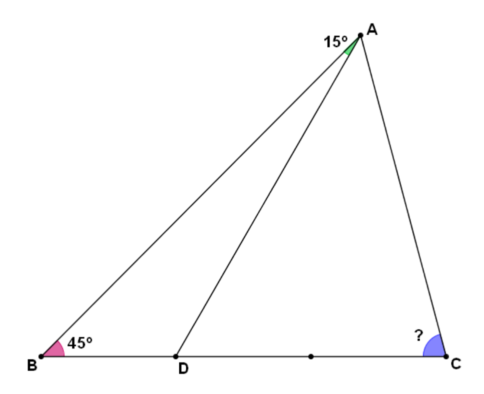
Sea ΔABC un triángulo.

a) Supongamos que $|AB| = 8$, $|AC| = 5$ y $\acute{A}rea(\Delta ABC) = 10\sqrt{3}$. Encontrar todos los posibles valores de $\angle A$.
b) Supongamos que $|AB| = 5\sqrt{2}$, $|BC| = 5\sqrt{3}$ y $\angle C = 45º$. Encontrar todos los posibles valores de $\angle A$.
c) Supongamos que $|AB| = 5\sqrt{2}$, $|BC| = 5$ y $\angle C = 45º$. Encontrar todos los posibles valores de $\angle A$.
d) Supongamos que $|AB| = 5\sqrt{2}$, $|BC| = 10$ y $\angle C = 45º$. Encontrar todos los posibles valores de $\angle A$.
e) Supongamos que $|AB| = 5\sqrt{2}$, $|BC| = 15$ y $\angle C = 45º$. Encontrar todos los posibles valores de $\angle A$.

Fuente: [Andreescu] Página 23

13. Ángulos en un triángulo 15-45 y punto medio.

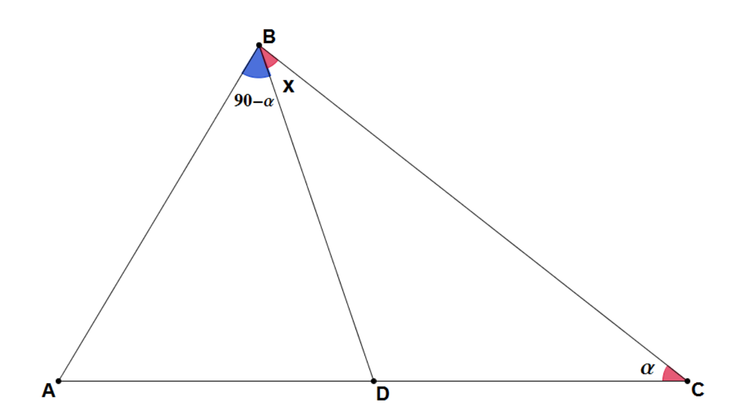
Sea ΔABC un triángulo en el cual $\angle ABC = 45º$. En el segmento $\overline{BC}$ marcamos el punto D tal que $2\left|\overline{BD}\right| = \overline{CD}$, y $\angle DAB = 15º$. Determinar el ángulo $\angle ACB$.



Fuente: AMC 2001-12

14. Ángulos en un triángulo con mediana y ángulos α y $90-\alpha$

Sea ΔABC, D el punto medio de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ una mediana. Sea $\alpha = \angle ACB$. Demostrar que si $\angle ABD = 90-\alpha$, entonces $\angle DBC = \alpha$.

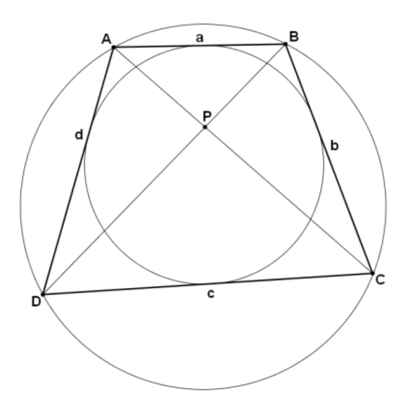


Fuente del enunciado: http://www.gogeometry.com/problem/p108_angle_triangle_median.htm

15. Área de la circunferencia inscrita en un cuadrilátero cíclico.

Sea ABCD un cuadrilátero cíclico que contiene una circunferencia inscrita. Sea P el punto de corte de sus diagonales. Sabemos que $AB = 1$, $CD = 4$ y $BP : DP = 3 : 8$.

Si el área de la circunferencia inscrita en el cuadrilátero se puede expresar como $\frac{p\pi}{q}$, donde p y q son enteros positivos coprimos, determina $p + q$.

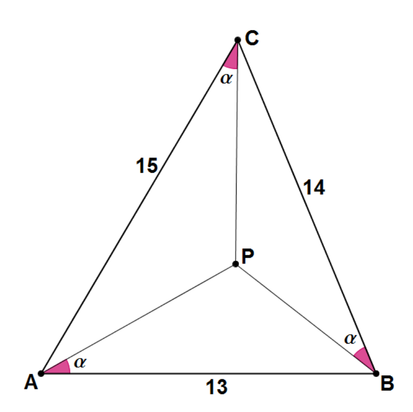


Mock AIME 3 Pre 2005 Problems/Problem 7

Fuente: https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php?title=Mock_AIME_3_Pre_2005_Problems/Problem_7

16. Tres ángulos iguales en el interior de un triángulo.

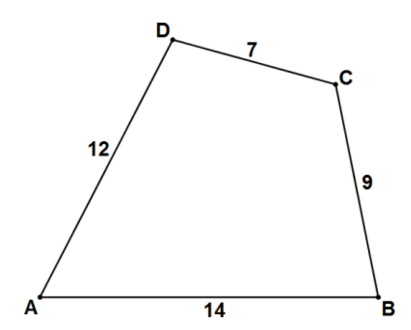
Un punto P está situado en el interior de un triángulo ΔABC de forma que los ángulos $\angle PAB$, $\angle PBC$ y $\angle PCA$ son congruentes. Los lados del triángulo tienen longitudes $|AB| = 13$, $|BC| = 14$ y $|CA| = 15$, y la tangente del ángulo $\angle PAB$ es m/n, donde m y n son enteros positivos coprimos. Encontrar $m+n$.



Fuente: AIME 1999.

17. La circunferencia más grande en el interior de un cuadrilátero.

Consideremos los cuadriláteros $ABCD$ tales que $AB=14$, $BC=9$, $CD=7$ y $DA=12$. ¿Cuál es el radio de la circunferencia más grande posible que podemos trazar en el interior (tocando o no los lados) de este cuadrilátero?

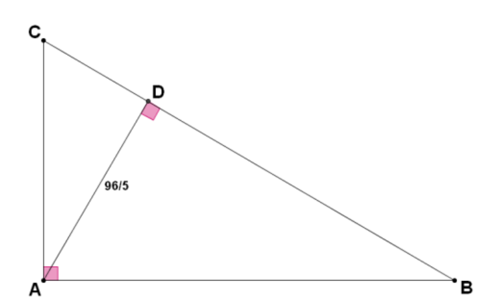


Fuente: Pregunta #24 de las "MAA AMC 12A 2011 Competition"
https://www.maa.org/sites/default/files/pdf/CurriculumInspirations/CB091_The-Biggest-Circle.pdf

Observación: El razonamiento que aparece en la solución propuesta es inspiratorio, no es un razonamiento especialmente riguroso.

18. Lados de un triángulo rectángulo sabiendo perímetro y altura.

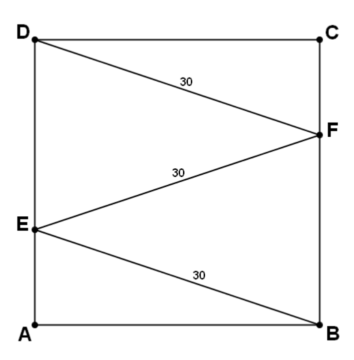
Determina los lados del triángulo rectángulo del que se conocen el perímetro P = 96 y la altura sobre la hipotenusa h =96/5.



Fuente:

19. Área de un cuadrado conociendo tres rectas internas.

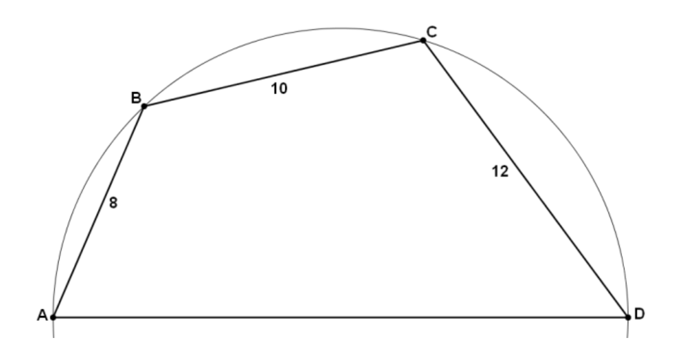
En un cuadrado $\Diamond ABCD$, un punto E pertenece al lado AD y un punto F pertenece al lado BC de forma que $BE = EF = FD = 30$. Determina el área del cuadrado.



Fuente: AIME 2011

20. Lado de un cuadrilátero cíclico conociendo los otros tres.

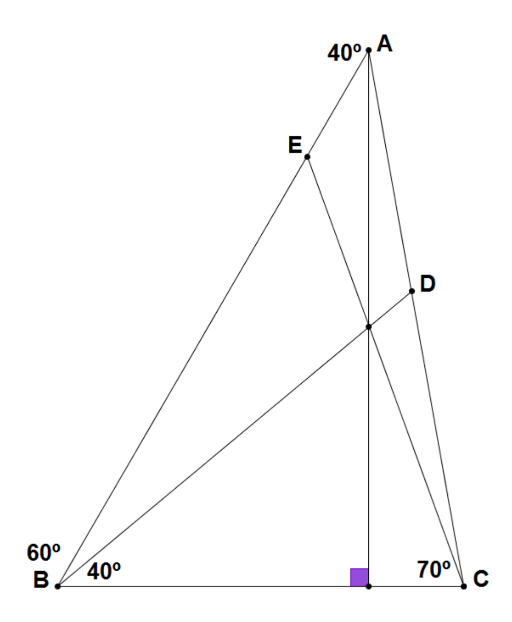
Sea $\Diamond ABCD$ un cuadrilátero cíclico inscrito en una circunferencia con diámetro AD. Determina dicho diámetro sabiendo que $AB = 8$, $BC = 10$ y $CD = 12$.



Fuente: https://www.mathalino.com/reviewer/plane-geometry/pg-010-quadrilateral-with-one-side-as-diameter-of-circumscribing-circle

21. Ángulo recto en un triángulo 40-60-80.

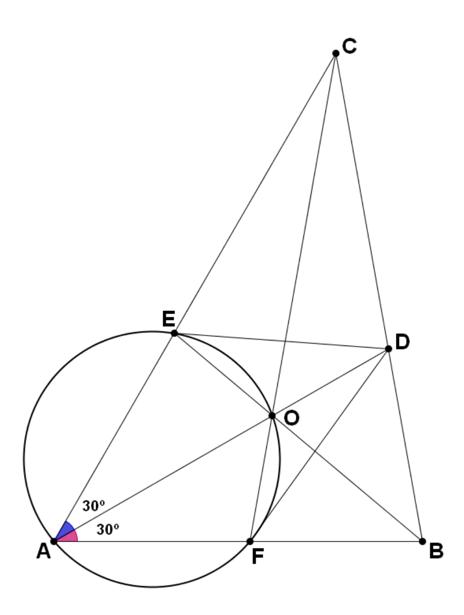
Sea ΔABC un triángulo tal que $\angle BAC = 40º$, $\angle ABC = 60º$. Sean D y E puntos en los lados AC y AB respectivamente, tales que $\angle CBD = 40º$ y $\angle BCE = 70º$. Sea F el punto de corte de los segmentos $\overline{BD}$ y $\overline{CE}$. Demuestra que $AF \perp BC$.



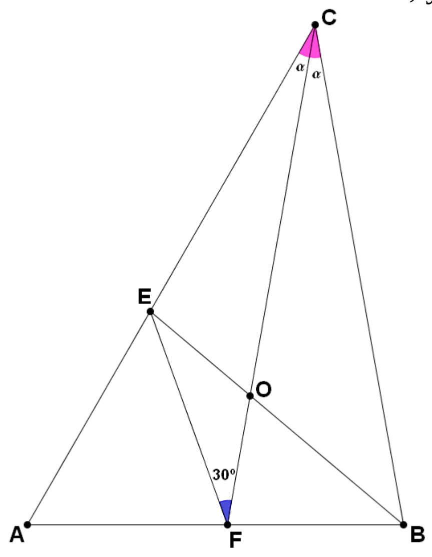
Fuente: Canadá 1998, [Andreescu] Página 23

22. Cuadrilátero cíclico en un triángulo con un ángulo de 60º.

a) Sea ΔABC un triángulo en el cual $\angle BAC = 60º$. Trazamos sus bisectrices $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$, que se cortarán en el incentro O. Demuestra que $\lozenge AFOE$ es un cuadrilátero cíclico, y por tanto $\angle EFO = \angle FEO = 30º$ y $\overline{EO} \cong \overline{OF}$.



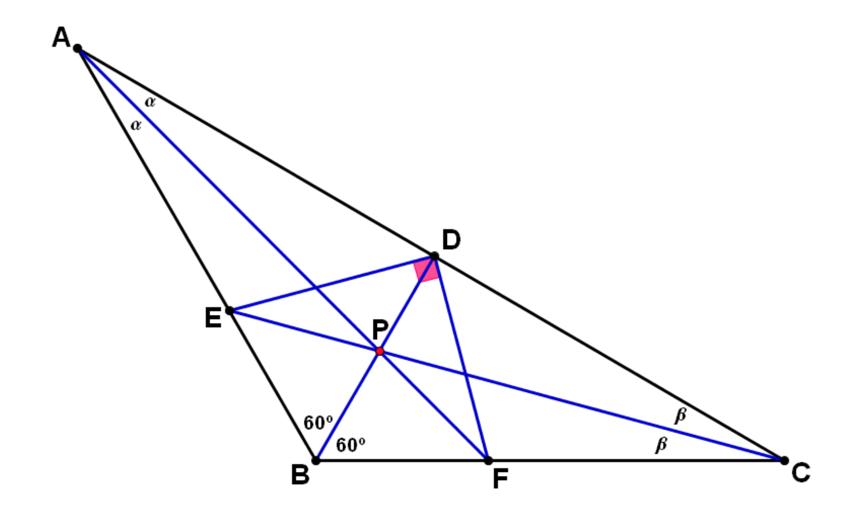
b) Supongamos que en ΔABC con $\angle BAC = 60º$ trazamos una bisectriz $\overline{CF}$, un punto E en el lado $\overline{AC}$ tal que $\angle CFE = 30º$ y los segmentos $\overline{EB}$ y $\overline{CF}$ se cortan en un punto O. Demostrar que entonces estamos en la situación anterior, y en particular $\overline{EO} \cong \overline{OF}$.



Fuente: Este problema es el problema #70 de "Problemas de matemáticas, Vol.1"

23. Ángulo recto en un triángulo con ángulo 120° y bisectrices.

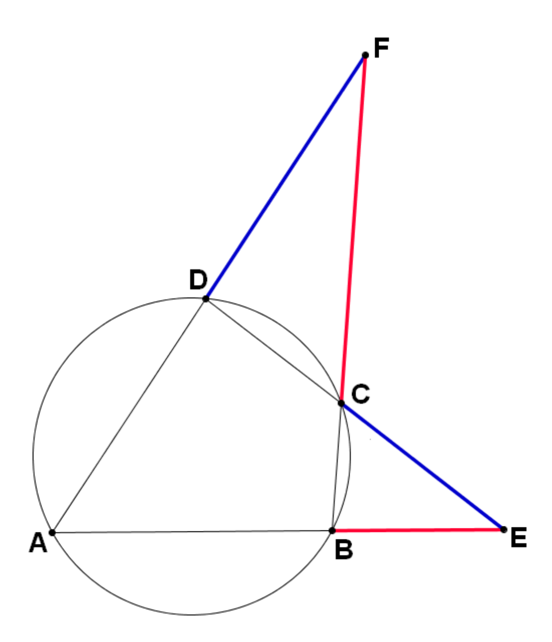
Sea ΔABC un triángulo, $\overline{AF}$, $\overline{BD}$ y $\overline{CE}$ sus bisectrices, y sabemos que $\angle ABC = 120^{\circ}$.
Demostrar que $ED \perp DF$.



Fuente: “Triangle Problem 368” de www.gogeometry.com

24. Razón de segmentos en un cuadrilátero cíclico.

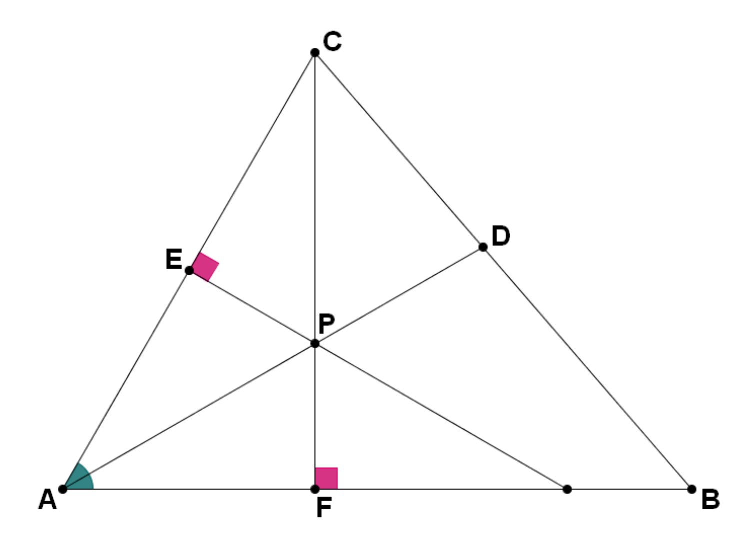
Dado un cuadrilátero cíclico $\lozenge ABCD$, sea $E = AB \cap CD$ y $F = AD \cap BC$. Demostrar que $DF \cdot CE = BE \cdot CF$.



Fuente: https://www.cut-the-knot.org/blue/DaosProduct.shtml

25. Intersección de bisectriz, altura y mediatriz en un triángulo con 60°.

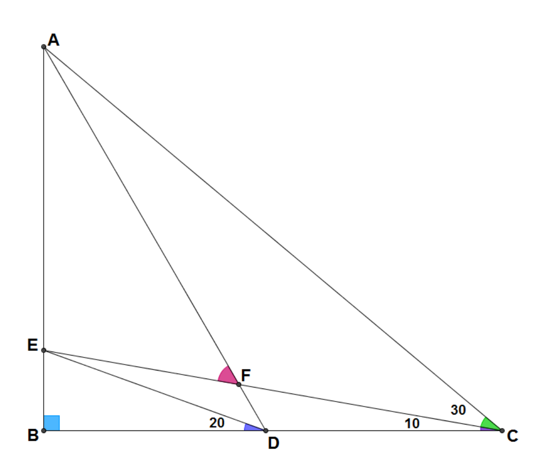
Dado un triángulo escaleno ΔABC con $\angle BAC = 60^{\circ}$, demostrar que la bisectriz por A, la altura por el vértice C y la mediatriz del segmento AC son concurrentes.



Fuente: Problema #663 de www.gogeometry.com

26. Ángulo interior en un triángulo rectángulo 90-40-50 y cevianas 10-20-30.

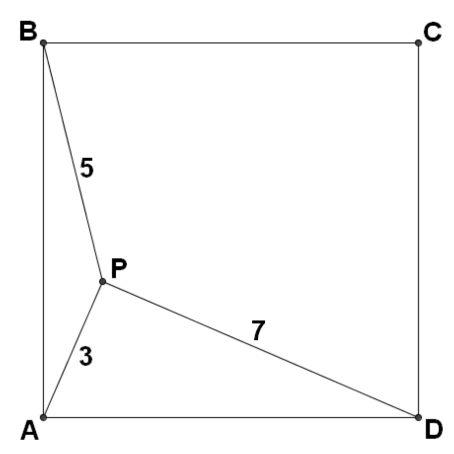
Sea un triángulo rectángulo ΔABC, con $\angle B = 90^\circ$, trazamos las cevianas $\overline{AD}$ y $\overline{CE}$ que se cortarán en un punto F. Supongamos $\angle BCE = 10^\circ$, $\angle ECA = 30^\circ$ y $\angle BDE = 20^\circ$. Determinar el ángulo $\angle EFA$.



Fuente: Problema #964 de la web www.gogeometry.com

27. Área de un cuadrado con punto interno a distancia 3-5-7.

Determina el área de un cuadrado $ABCD$ que contiene un punto P tal que $PA = 3$, $PB = 5$ y $PD = 7$.



Nota: Intenta resolver este problema sin plantear el evidente sistema de tres ecuaciones de segundo grado.

Fuente: Challenging Problems in Geometry (Alfred S. Posamentier) Problema 6.10.

28. Lista de ejercicios para practicar el Teorema de Ptolomeo.

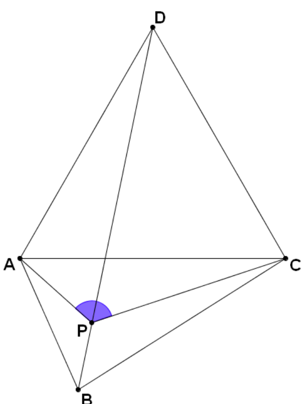
a) Si un triángulo isósceles ΔABC, con $AB = AC$ se inscribe en una circunferencia, y P es un punto del arco BC, demuestra que $\frac{PA}{PB+PC} = \frac{AC}{BC}$, una constante en dicho triángulo.

b) Si un triángulo equilátero ΔABC se inscribe en una circunferencia, y P es un punto del arco BC, demuestra que $PA = PB + PC$.

c) Si un cuadrado $\Diamond ABCD$ se inscribe en una circunferencia, y P es un punto del arco BC, demuestra que $\frac{PA+PC}{PB+PD} = \frac{PD}{PA}$.

Nota: Intenta generar igualdades análogas para otros polígonos regulares:
Si un pentágono regular ABCDE se inscribe en una circunferencia, y P es un punto del arco BC, demuestra que $PA + PD = PB + PC + PE$.
Si un hexágono regular ABCDEF se inscribe en una circunferencia, y P es un punto del arco BC, demuestra que $PE + PF = PA + PB + PC + PD$

d) Trazamos un triángulo equilátero ΔADC externamente sobre el lado $\overline{AC}$ de un triángulo ΔABC dado. Sea un punto P del segmento $\overline{BD}$. Encontrar el ángulo $\angle APC$ tal que $BD = PA + PB + PC$.



e) Trazamos una recta por el vértice A de un triángulo equilátero ΔABC, que cortará $\overline{BC}$ en D y la circunferencia circunscrita en P. Probar que

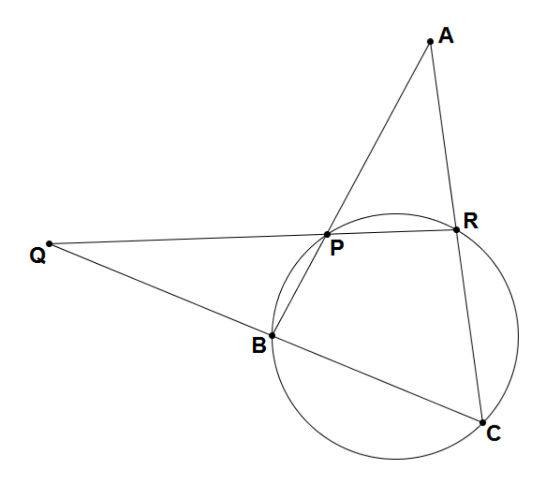
$$\frac{1}{PD} = \frac{1}{PB} + \frac{1}{PC}$$

Fuente: Challenging Problems in Geometry (Alfred S. Posamentier) Página 34.

29. Ceviana y cuadrilátero cíclico.

Una circunferencia que pasa por los vértices B y C de un triángulo ΔABC corta $\overline{AB}$ en P y $\overline{AC}$ en R. Sea Q el punto de intersección entre $\overleftrightarrow{PR}$ y $\overleftrightarrow{BC}$. Demostrar que

$$\frac{QC}{QB} = \frac{RC \cdot AC}{PB \cdot AB}$$

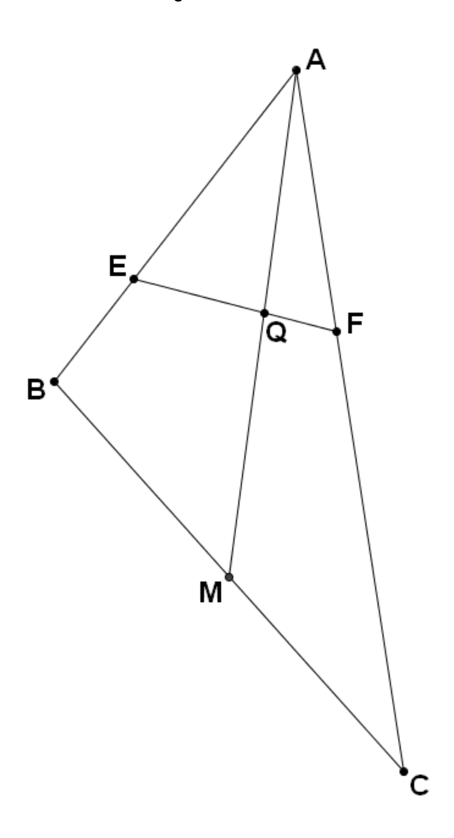


Fuente: Challenging Problems in Geometry (Alfred S. Posamentier) Página 37.

30. Razón entre transversal y mediana.

Dado un triángulo ΔABC, tomamos puntos E en AB y F en AC tales que $AE = AF$.
Sea Q el punto de corte entre EF y la mediana AM. Demostrar que

$$\frac{QE}{QF} = \frac{AC}{AB}$$

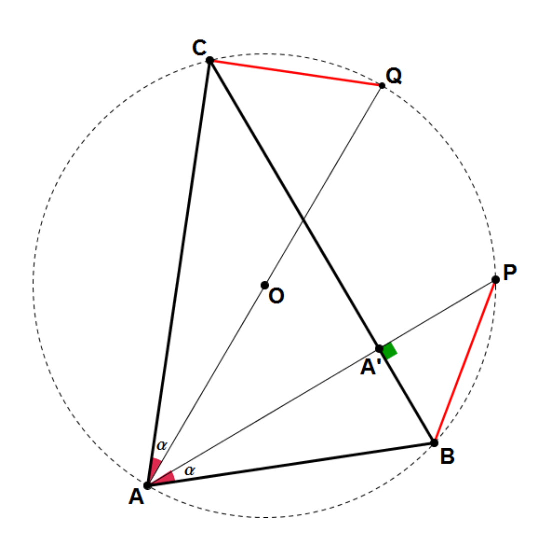


Fuente: Challenging Problems in Geometry (Alfred S. Posamentier) Página 38.

31. Cuerdas determinadas por el circuncentro y altura en un triángulo.

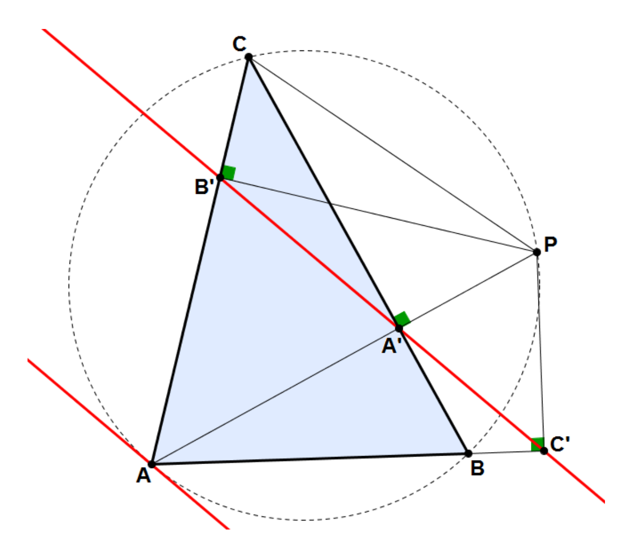
Dado un triángulo ΔABC con circuncentro O. Sea Q el punto de corte de la recta AO y la circunferencia circunscrita del triángulo. Por el vértice A trazamos la altura AA' que cortará la circunferencia circunscrita en el punto P.

Entonces $\left|\overline{CQ}\right| = \left|\overline{BP}\right|$ y $\left|\angle CAQ\right| = \left|\angle PAB\right|$.



32. Recta de Simson con altura de un triángulo.

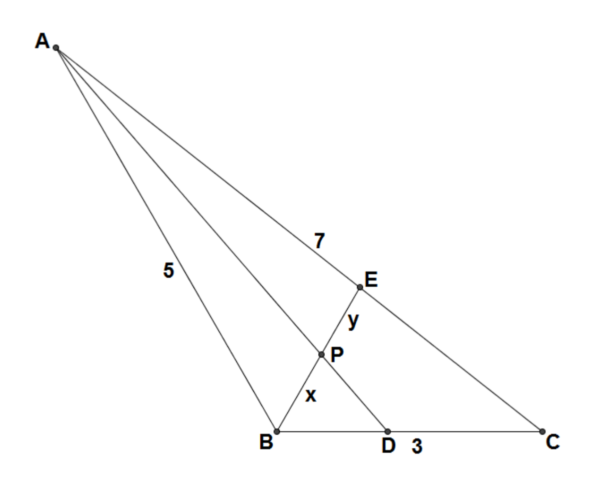
Dado un triángulo ΔABC, por el vértice A trazamos la altura AA' que cortará la circunferencia circunscrita en el punto P. Demostrar que la recta de Simson asociada al punto P es paralela a la recta tangente a la circunferencia por A.



Fuente: Challenging Problems in Geometry (Alfred S. Posamentier) Página 43.

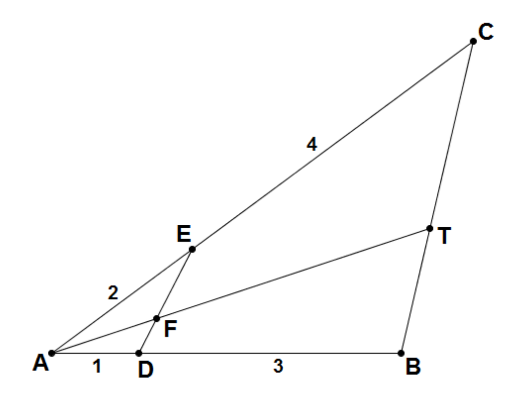
33. Ejercicios para practicar razones de segmentos con bisectrices.

a) En un triángulo ΔABC, las bisectrices AD y BE se cortan en un punto P. Si los lados del triángulo son a = 3, b = 5, c = 7, y definiendo BP = x, PE = y, calcula la razón x:y, donde x e y son dos enteros coprimos.



ARML 1989 Team Question #4

b) En un triángulo ΔABC, con bisectriz AT, sean D en AB y E en AC tales que AD = 1, BD = 3, AE = 2, y EC = 4. Calcula la razón AF : AT.

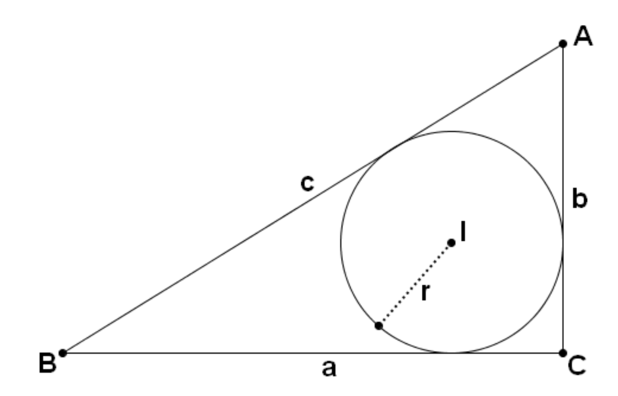


ARML 1992, Individual Question #18

34. Incentro de un triángulo rectángulo.

a) Demuestra que el inradio de un triángulo rectángulo con catetos a y b e hipotenusa c es

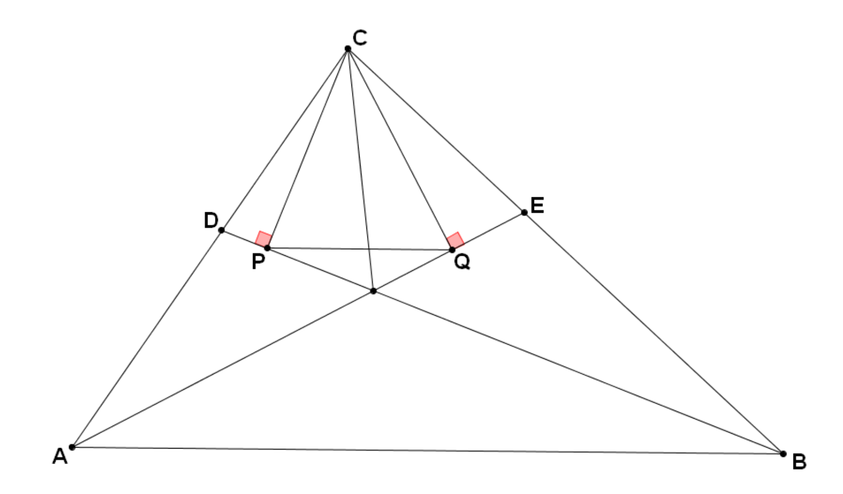
$$\frac{a+b-c}{2}$$



b) Demuestra que si los lados de un triángulo rectángulo tienen longitudes enteras, entonces el inradio también es un número entero.

35. Recta paralela con bisectrices y perpendiculares.

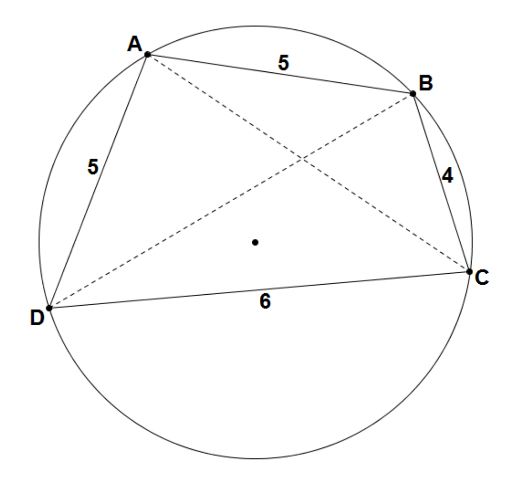
Dado un triángulo ΔABC, $\overline{AE}$ es la bisectriz de $\angle BAC$, $\overline{BD}$ es la bisectriz de $\angle ABC$, $CP \perp BD$ y $CQ \perp AE$ con P en DB y Q en AE. Demuestra que PQ es paralela a AB.



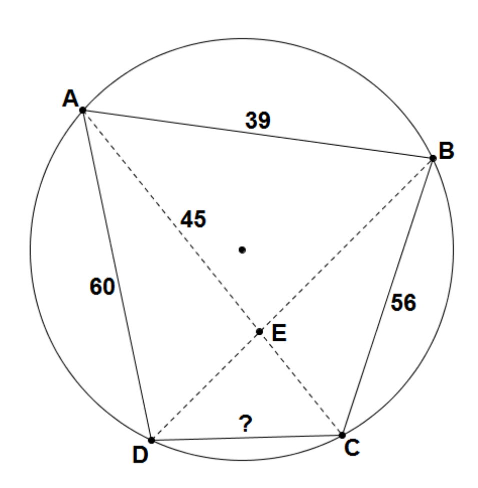
Fuente: Challenging Problems in Geometry (Alfred S. Posamentier) Página 3.

36. Dos ejercicios para la determinación de las diagonales de un cuadrilátero cíclico.

a) Sea $\lozenge ABCD$ un cuadrilátero cíclico con lados AB=5, BC=4, CD=6 y DA=5. Encuentra las longitudes de las diagonales AD y BC.



b) Sea $\lozenge ABCD$ un cuadrilátero cíclico. Las diagonales AC y BD se cortan en el punto E. AB=39, AE=45, AD=60, BC=56. Encuentra la longitud CD.



Fuente del apartado b: BDMO 2008 National

37. Puntos en un cuadrilátero cíclico (AMC 12A 2017 #24).

Un cuadrilátero $\Diamond ABCD$ está inscrito en una circunferencia O y tiene como lados AB=3, BC=2, CD=6 y DA=8. Sean X e y puntos en $\overline{BD}$ tales que

$$\frac{DX}{BD}=\frac{1}{4} \text{ y } \frac{BY}{BD}=\frac{11}{36}.$$

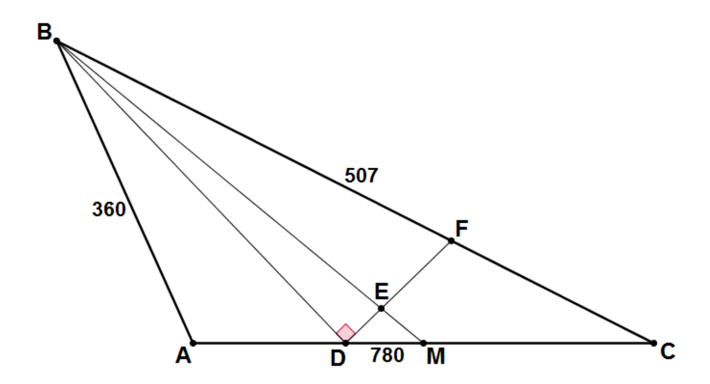
Sea E el punto de intersección de la recta AX con la recta paralela a $\overline{AD}$ por Y. Sea F el punto de intersección de la recta CX con la recta paralela a $\overline{AC}$ por E. Sea G el punto de intersección la circunferencia O y la recta CX que no es C. Determina $XF \cdot XG$.

(A) 17 (B) $\frac{59-5\sqrt{2}}{3}$ (C) $\frac{91-12\sqrt{3}}{4}$ (D) $\frac{67-10\sqrt{2}}{3}$ (E) 18

Fuente: AMC 12A 2017 Problema #24

38. Razón de segmentos en el interior de un triángulo (AIME I 2003 #15).

En el triángulo ΔABC, AB=360, BC=507 y CA=780. Sea M el punto medio de $\overline{CA}$, y sea D el punto en $\overline{CA}$ tal que $\overline{BD}$ sea la bisectriz de $\angle ABC$. Sea F el punto en $\overline{BC}$ tal que $\overline{DF} \perp \overline{BD}$. Supongamos que $\overline{DF}$ corta $\overline{BM}$ en E. La razón $DE : EF$ se puede escribir de la forma m/n, donde m y n son números positivos coprimos. Encuentra $m+n$.



Fuente: AIME I 2003 #15

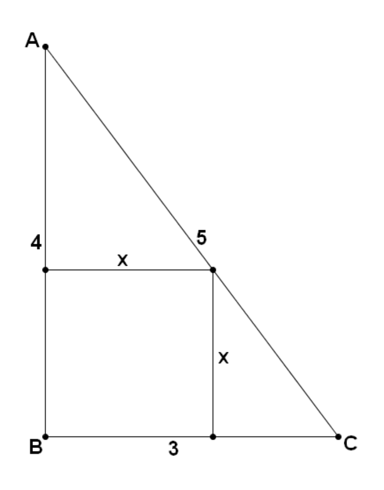
39. Múltiples proyecciones en el interior de un triángulo.

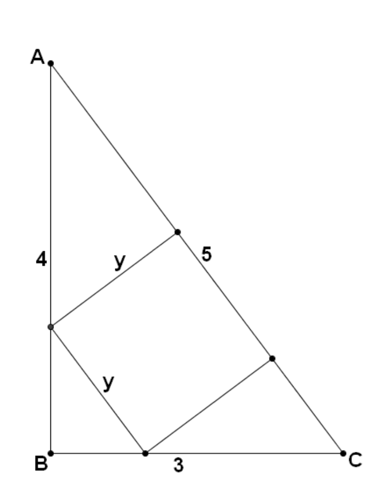
Sea un cuadrilátero $\lozenge ABCD$. Sea M_1 un punto de $\overline{AB}$, sea M_2 la proyección de M_1 en $\overleftrightarrow{BC}$ con centro D, sea M_3 la proyección de M_2 en $\overleftrightarrow{CD}$ con centro A, sea M_4 la proyección de M_3 en $\overleftrightarrow{DA}$ con centro B, sea M_5 la proyección de M_4 en $\overleftrightarrow{AB}$ con centro C, y así sucesivamente. Demostrar que $M_{13} = M_1$.

40. Dos cuadrados inscritos en un triángulo rectángulo.

Un cuadrado de lado x se inscribe en un triángulo rectángulo con lados de longitud 3, 4 y 5 de forma que uno de sus vértices coincide con el ángulo recto del triángulo. Otro cuadrado con lado y se incribe en el mismo triángulo de forma que uno de sus lados está contenido en la hipotenusa del triángulo. Determina $\frac{x}{y}$.

(A) $\frac{12}{13}$ (B) $\frac{35}{37}$ (C) 1 (D) $\frac{37}{35}$ (E) $\frac{13}{12}$





Fuente: AMC 12 A 2017 #19

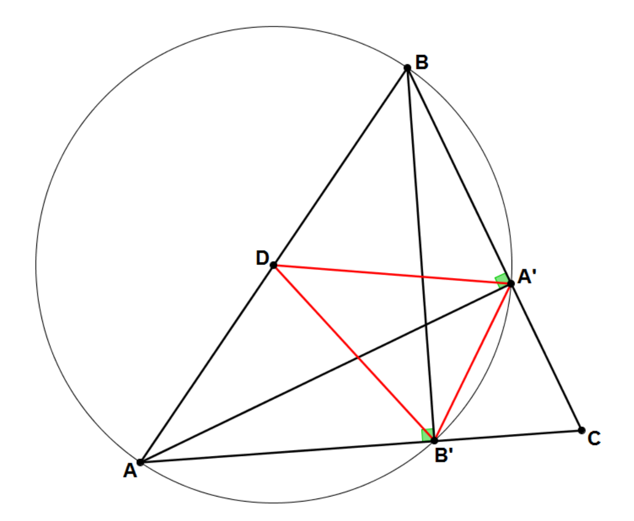
Soluciones.

Se ofrecen soluciones completas a todos y cada uno de los ejercicios. Siempre se indica la fuente del enunciado y de la solución. Si no se indica la fuente, son del autor de este libro, Gerard Romo, que con ellas no pretende exhibir erudición: no son necesariamente las mejores, ni las más bellas, ni las óptimas. Seguro que tú encontrarás soluciones alternativas mucho más bellas que las mías.

Las referencias numéricas que aparecen en las demostraciones (por ejemplo: 6.3.2 o 11.5.4) hacen indican apartados del libro de teoría. Este libro se puede descargar gratuitamente en el enlace siguiente:
www.toomates.net/biblioteca/GeometriaAxiomatica.pdf

1.

Trazamos la circunferencia de centro D y radio $\overline{DA} \cong \overline{DB}$.

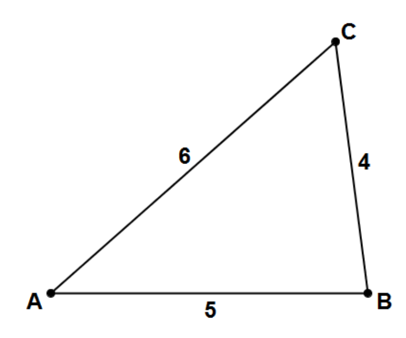


Los ángulos $\angle AA'B$ y $\angle AB'B$ son rectos, luego estarán inscritos en la circunferencia, y por tanto $\overline{DB'} \cong \overline{DA} \cong \overline{DA'} \Rightarrow \overline{DB'} \cong \overline{DA'}$, es decir, $\Delta DA'B'$ es isósceles.

2.

Sean $AC = 6,\ AB = 5,\ BC = 4$.

Sabemos que lado mayor corresponde a ángulos opuestos mayores, luego
$AC > AB > BC \Rightarrow \angle B > \angle C > \angle A$
y por tanto nuestro objetivo es demostrar que $\angle B = 2\angle A = 2\alpha$

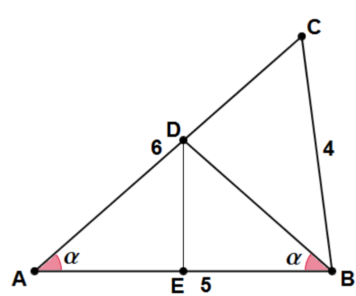


Por el teorema del coseno:

$$4^2 = 6^2 + 5^2 - 2\cdot 5\cdot 6\cos(\alpha) \Rightarrow$$

$$\cos(\alpha) = \frac{4^2 - 6^2 - 5^2}{-2\cdot 5\cdot 6} = \frac{3}{4}$$

Trazamos el ángulo α sobre el lado AB, y sea D su punto de corte con AC. Determinamos así un triángulo isósceles ΔABD. Trazamos la mediatriz de AB por el punto medio E, que pasará por D, puesto que en un triángulo isósceles coincide la mediatriz con la mediana.



Por trigonometría:

$$\cos(\alpha) = \frac{AE}{AD} \Leftrightarrow \frac{3}{4} = \frac{2/5}{AD} \Leftrightarrow AD = \frac{10}{3} \Rightarrow DC = 6 - \frac{10}{3} = \frac{8}{3}$$

Por ser ΔABD isósceles, $BD = AD = 10/3$.

Sea $\beta = \angle CBA$.
Aplicando el Teorema del cateto,

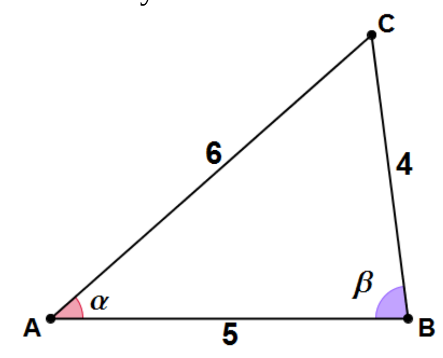
$$\left(\frac{8}{3}\right)^2 = \left(\frac{10}{3}\right)^2 + 4^2 - 2\frac{10}{3}4\cos(\beta) \Rightarrow$$

$$\cos(\beta) = \frac{4}{3}$$

Luego $\beta = \alpha$ y por tanto $\angle B = 2\alpha$.

Observaciones:
En la página web https://www.cut-the-knot.org/m/Geometry/456Triangle.shtml encontramos tres soluciones diferentes a la mía.

La **solución #3** utiliza dos veces la ley de cosenos:

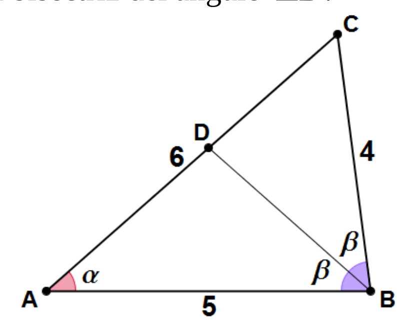


$$4^2 = 6^2 + 5^2 - 2\cdot 5\cdot 6\cos(\alpha) \Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{3}{4}$$

y $\cos(\beta) = \frac{1}{8}$

y comprobamos que estos dos valores satisfacen la fórmula del ángulo doble:
$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

La **solución #2** se basa en la bisectriz del ángulo $\angle B$:



Sea el semiperímetro $p = \dfrac{AB + BC + AC}{2} = \dfrac{15}{2}$

Entonces por cierta fórmula que aparece en dicha página web

$$BD = \frac{4p(p - AC)\cdot BC\cdot AB}{(BC + AB)^2} = \frac{10}{3}$$

Aplicando el teorema de la bisectriz:

$$\frac{DC}{AD}=\frac{BC}{AB}=\frac{4}{5}$$

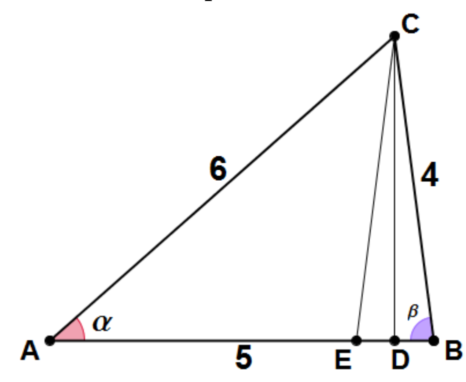
Luego

$$\frac{AC}{AD}=\frac{AD+DC}{AD}=\frac{AD}{AD}+\frac{DC}{AD}=1+\frac{DC}{AD}=1+\frac{4}{5}=\frac{9}{5}\Rightarrow$$

$$AD=\frac{AC}{9/5}=\frac{6}{9/5}=\frac{10}{3}$$

Es decir, AD = BD, luego el triángulo ΔABD es isósceles, $\alpha=\beta$ y por tanto $\angle CBA=2\beta=2\alpha$.

La **solución #1** se basa en trazar la altura por C:



Sea D la base de dicha altura en AB y sea E el simétrico de B respecto de D: $ED=BD$.

Por Pitágoras $4^2=CD^2+BD^2$ y $6^2=CD^2+(5-BD)^2$, luego

$$6^2-4^2=(5-BD)^2-BD^2$$

$$20=5^2-2\cdot 5\cdot BD+BD^2-BD^2$$

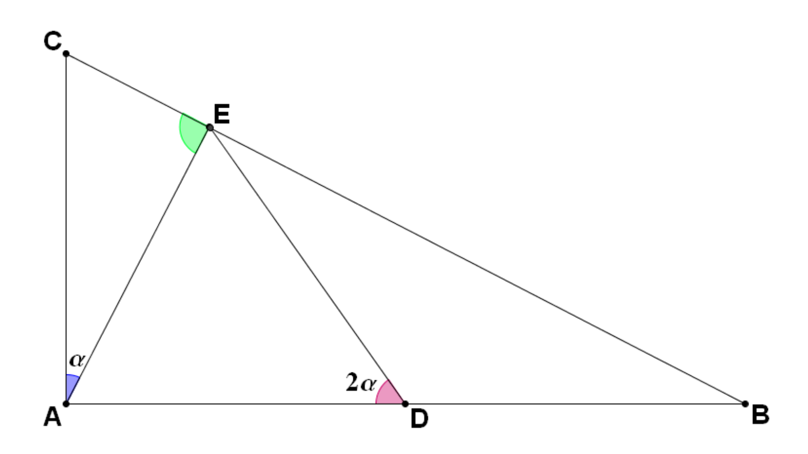
$$20=25-10BD\Rightarrow BD=\frac{1}{2}$$

Luego $BE=1\Rightarrow AE=6-1=5=AC\Rightarrow$ ΔAEC es isósceles $\Rightarrow \angle ACE=\alpha$

Y por el Teorema del Ángulo Externo

$\beta=\angle BEC=\angle EAC+\angle ACE=\alpha+\alpha=2\alpha$.

3.



$\angle EAD = 90 - \alpha$

$\angle EAD + 2\alpha + \angle AED = 180 \Rightarrow \angle AED = 90 - \alpha$

$\Rightarrow \Delta AED$ es isósceles

$\Rightarrow AB = AD = ED$

$\Rightarrow \Delta EDB$ es isósceles

$\angle EDB = 180 - 2\alpha$

$2\angle DBE + \angle EDB = 180$

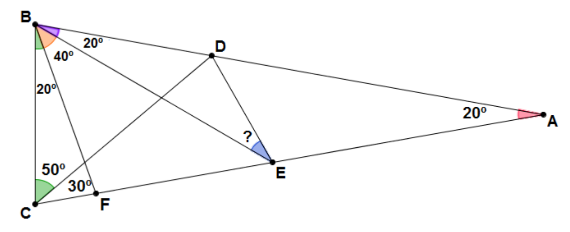
$\Rightarrow 2\angle DBE = 180 - (180 - 2\alpha)$

$\Rightarrow \angle DBE = \alpha$

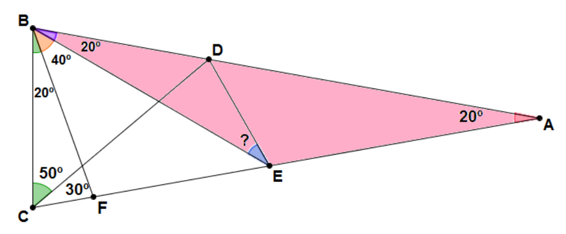
Luego los triángulos ΔAEC y ΔBAC son semejantes por el criterio AA. De esto se deduce que ΔAEC también es rectángulo, es decir, $\angle AEC$ es recto.

4.

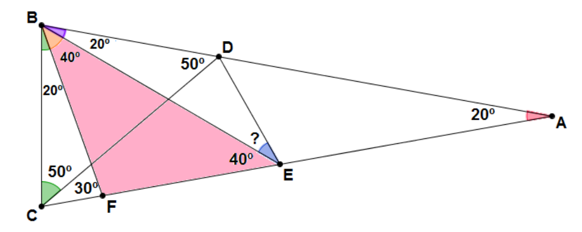
Añadimos al esquema un punto F sobre $\overline{CA}$ tal que $\angle CBF = 20^{o}$. Luego $\angle FBE = \angle CBE - \angle CBF = 60 - 20 = 40^{o}$.



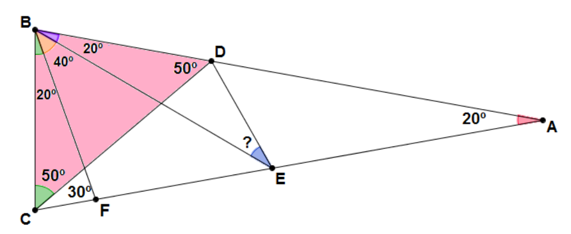
El triángulo ΔBEA es isósceles, luego $\angle BEA = 180 - 2 \cdot 20 = 140^{o}$, y $\angle CEB = 180 - \angle BEA = 40^{o}$.



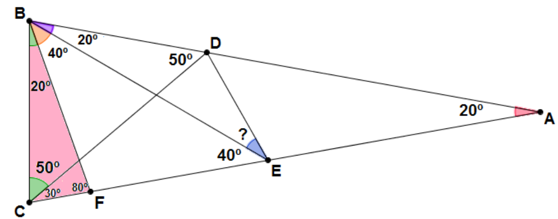
El triángulo ΔBFE es isósceles, luego $\overline{BF} \cong \overline{EF}$:



$\angle BDC = 180 - \angle CBD - \angle BCD = 180 - 80 - 50 = 50^{o}$, luego el triángulo ΔBCD es isósceles en C, y por tanto $\overline{BC} \cong \overline{BD}$.



$\angle CFB = 180 - \angle CBF - \angle BCF = 180 - 20 - 80 = 80^{o} = \angle BCF$, luego el triángulo ΔBCF es isósceles, luego $\overline{BC} \cong \overline{BF}$:



Añadimos al esquema el segmento $\overline{DF}$. Tenemos que

$$\overline{BD} \cong \overline{BC} \cong \overline{BC} \cong \overline{BF} \Rightarrow \overline{BD} \cong \overline{BF}$$

y por lo tanto el triángulo $\angle BDF$ es isósceles en B y por tanto

$$\angle BDF = \angle BFD = \frac{180 - \angle FBD}{2} = \frac{180 - 60}{2} = 60^{o}$$

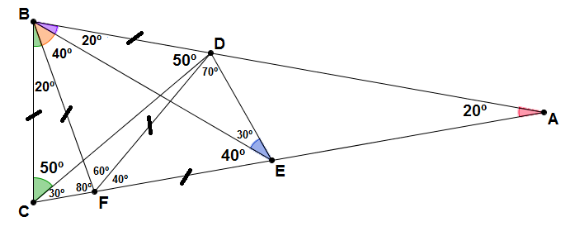
El triángulo ΔBDF es equilátero, pues sus ángulos son todos iguales a 60º, por lo tanto

$$\overline{FD} \cong \overline{BD} \cong \overline{BD} \cong \overline{BC} \cong \overline{BF} \cong \overline{BF} \cong \overline{EF} \Rightarrow \overline{FD} \cong \overline{EF}$$

Así pues, el triángulo ΔFED es isósceles en F, luego

$$\angle FDE = \angle FED = \frac{180 - \angle DFE}{2} = \frac{180 - 40}{2} = 70^{o}$$

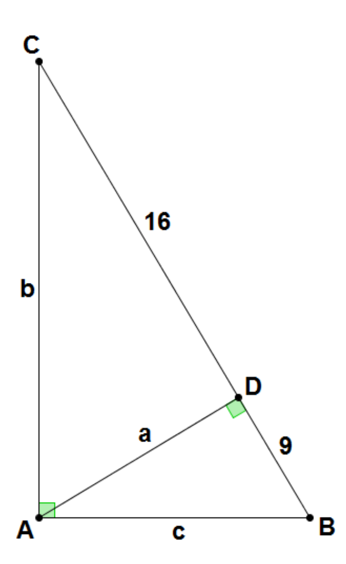
Luego $\angle BED = \angle FED - \angle FEB = 70 - 40 = 30^{o}$



Fuente de la solución: https://www.youtube.com/watch?v=HQc-54hQ8kw

5.

Denotamos los segmentos involucrados:



Una forma sencilla de resolver este problema es resolviendo el sistema de ecuaciones que se obtiene aplicando el Teorema de Pitágoras a los tres triángulos rectángulos involucrados:

$$\left.\begin{aligned}(16+9)^2 &= b^2+c^2\\ a^2+9^2 &= c^2\\ a^2+16^2 &= b^2\end{aligned}\right\}\Rightarrow (16+9)^2 = a^2+16^2+a^2+9^2$$

$$\Rightarrow 16^2+9^2+2\cdot 16\cdot 9 = a^2+16^2+a^2+9^2$$

$$\Rightarrow 2\cdot 16\cdot 9 = 2a^2 \Rightarrow 16\cdot 9 = a^2 \Rightarrow a=\sqrt{16\cdot 9}=4\cdot 3=12$$

Luego $c^2=12^2+9^2=144+81=225 \Rightarrow c=15$

$b^2=16^2+9^2=256+81=400 \Rightarrow b=20$

Sin utilizar Pitágoras, podemos abordar este problema de la siguiente manera:
Los triángulos ΔADC y ΔBDA son semejantes pues tienen los mismos ángulos, luego sus lados serán proporcionales, y por tanto

$$\frac{a}{16}=\frac{9}{a}\Rightarrow a^2=9\cdot 16 \Rightarrow a=\sqrt{9\cdot 16}=12$$

Ahora observamos que el triángulo ΔADB tiene catetos 12 y 9, es decir, semejante a un triángulo 4-3-5, multiplicando por tres, luego su hipotenusa será $5\cdot 3=15$.

De la misma forma, el triángulo ΔADC tiene catetos 12 y 16, es decir, semejante a un triángulo 4-3-5, multiplicando por cuatro, luego su hipotenusa será $5\cdot 4=20$.

6.

$AC = CD \Rightarrow$ ΔCAD es isósceles en C y por tanto $\angle CAD = \angle CDA$.

$\angle DAB = \angle CAB - \angle CAD =$

$\angle CAB - \angle CDA =$

$\angle CAB - (180 - \angle ADB) =$

$\angle CAB + \angle ADB - 180 =$

$30 + \angle ABD + \angle ADB - 180 =$

$\angle ABD + \angle ADB - 150$

Pero por otro lado,

$\angle DAB + \angle ABD + \angle ADB = 180 \Rightarrow \angle ABD + \angle ADB = 180 - \angle DAB$

Luego

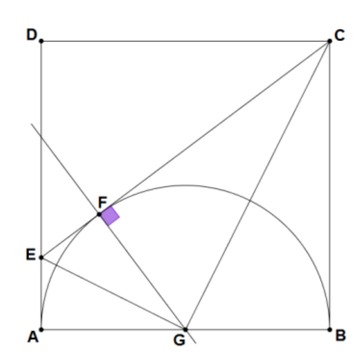
$\angle DAB = 180 - \angle DAB - 150 \Rightarrow$

$2\angle DAB = 30 \Rightarrow$

$\angle DAB = 15$

7.

Sea F el punto de tangencia. Sea G el centro de la semicircunferencia, es decir, el punto medio del lado AB. Sabemos que $\angle CFG$ es recto.



Los triángulos ΔGBC y ΔGFC son congruentes pues son triángulos rectángulos que tienen un cateto y la hipotenusa congruentes. Luego $CF = BC = 2$, y $\angle FGC = \angle CGB$.

De la misma forma observamos que los triángulos ΔAGE y ΔFGE son congruentes pues son triángulos rectángulos que tienen un cateto y la hipotenusa congruentes. Luego $\angle FGE = \angle EGA$.

Tenemos que

$$\angle FGE + \angle EGA + \angle FGC + \angle CGB = 180 \Rightarrow$$
$$2\angle FGE + 2\angle FGC = 180 \Rightarrow$$
$$\angle FGE = 90 - \angle FGC = \angle FCG$$

Luego el triángulo ΔFGE es semejante al triángulo ΔFCG.

Y por tanto sus lados serán proporcionales:

$$\frac{EF}{FG} = \frac{FG}{FC} \Leftrightarrow \frac{EF}{1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow EF = \frac{1}{2}$$

Finalmente, $EC = EF + FC = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$

8.

Aplicando el Teorema del coseno,

$$4^2 = 5^2 + 6^2 - 2\cdot 5\cdot 6\cos A \Rightarrow \cos A = \frac{16-25-36}{-60} = \frac{3}{4}$$

Aplicando la fórmula del ángulo doble: $\sin 2A = 2\sin A\cos A$

Luego $\dfrac{\sin 2A}{\sin C} = \dfrac{2\sin A\cos A}{\sin C} = 2\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{\sin A}{\sin C} = \dfrac{3}{2}\dfrac{\sin A}{\sin C} = (*)$

Aplicando el Teorema del seno:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c} \Leftrightarrow \frac{\sin A}{\sin C} = \frac{a}{c} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Finalmente,

$(*) = \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{2}{3} = 1$

9.

Primera versión.

Los triángulos ΔABC y ΔAEC son congruentes pues tienen los tres lados congruentes (criterio SSS). Luego $\angle EAC = \angle CAB = \alpha$. Por otro lado, $\angle ACE = \angle ACB = 90 - \alpha$, luego

$180 = \angle ACB + \angle ACE + \angle ECD \Rightarrow 180 = 90 - \alpha + 90 - \alpha + \angle ECD \Rightarrow \angle ECD = 2\alpha$.

$$\frac{BC}{AC} = \sin\alpha \Rightarrow BC = AC\sin\alpha$$

$$\frac{CE}{AC} = \sin\alpha \Rightarrow CE = AC\sin\alpha$$

$$\frac{CD}{CE} = \sin 2\alpha \Rightarrow CD = CE\sin 2\alpha$$

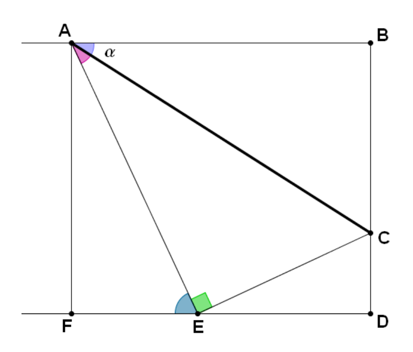
$$\omega = BC + CD = AC\sin\alpha + CE\sin 2\alpha = AC\sin\alpha + AC\sin\alpha\sin 2\alpha =$$

$$= AC(\sin\alpha + \sin\alpha\sin 2\alpha) \Rightarrow$$

$$AC = \frac{\omega}{\sin\alpha + \sin\alpha\sin 2\alpha}$$

Segunda versión.

Trazamos la perpendicular a AB por A, sea F su punto de corte con la recta ED.



$FD \,//\, AB$ luego $\angle FEA = \angle EAB = 2\alpha$.

$$\left.\begin{aligned} \sin 2\alpha = \frac{AF}{AE} \Rightarrow AE = \frac{\omega}{\sin 2\alpha} \\ \cos\alpha = \frac{AE}{AC} \Rightarrow AC = \frac{AE}{\cos\alpha} \end{aligned}\right\} \Rightarrow AC = \frac{\omega}{\sin 2\alpha\cos\alpha}$$

Observación. De las dos soluciones alternativas se deduce que

$$\sin\alpha + \sin\alpha\sin 2\alpha = \sin 2\alpha\cos\alpha .$$

10.

Por ser un cuadrilátero, sabemos (8.2.4) que

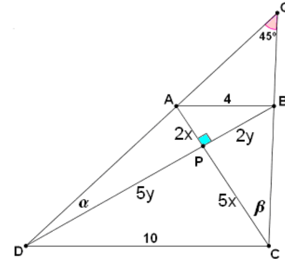
$$\acute{A}rea(\Diamond ABCD) = \frac{DB\cdot AC\cdot \sin(90)}{2} = \frac{DB\cdot AC}{2}$$

Por otro lado,

$$\angle CDP = \angle ABP \Rightarrow \frac{PC}{10} = \sin\angle CDP = \sin\angle ABP = \frac{AP}{4} \Rightarrow 2PC = 5AP$$

$$\frac{PD}{10} = \cos\angle CDP = \cos\angle ABP = \frac{PB}{4} \Rightarrow 2PD = 5PB$$

Sea $2x = AP$. Entonces $2PC = 10x \Rightarrow PC = 5x$.
Sea $2y = BP$. Entonces $2PD = 10y \Rightarrow PD = 5y$.
Sea $\alpha = \angle ADP$ y $\beta = \angle BCP$.



Entonces $\tan\alpha = \dfrac{2x}{5y}$ y $\tan\beta = \dfrac{2y}{5x}$

Por otro lado,

$$\left.\begin{array}{l}\alpha + \angle PDC + \angle PCD + \beta + 45 = 180\\ \angle PDC + \angle PCD + 90 = 180\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha + 90 + \beta + 45 = 180 \Rightarrow \alpha + \beta = 45$$

Y aplicamos la fórmula de la tangente de la suma de ángulos (8.3.1):

$$1 = \tan(45) = \tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} = \frac{\dfrac{2x}{5y}+\dfrac{2y}{5x}}{1-\dfrac{2x}{5y}\cdot\dfrac{2y}{5x}} = \frac{\dfrac{2x^2}{5yx}+\dfrac{2y^2}{5xy}}{1-\dfrac{4}{25}} =$$

$$= \frac{\dfrac{2}{5xy}\left(x^2+y^2\right)}{21/25} = \frac{10\left(x^2+y^2\right)}{21xy}$$

Por ser ΔAPB un triángulo rectángulo,

$$(2x)^2 + (2y)^2 = 4^2 \Leftrightarrow 4x^2 + 4y^2 = 4^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4$$

Luego

$$1 = \frac{10\left(x^2+y^2\right)}{21xy} = \frac{10\cdot 4}{21xy} = \frac{40}{21xy} \Leftrightarrow 21xy = 40 \Leftrightarrow xy = \frac{40}{21}$$

Así pues,

$$\acute{A}rea(\Diamond ABCD) = \frac{DB\cdot AC}{2} = \frac{(2x+5x)(2y+5y)}{2} = \frac{(7x)(7y)}{2} = \frac{49xy}{2} =$$

$$= \frac{49(40/21)}{2} = \frac{140}{3}$$

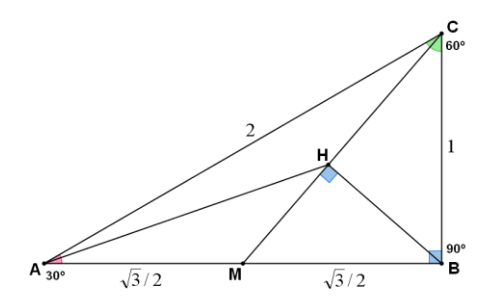
Fuente de la solución: [Altizio] Página 8.

11.

Un triángulo 30-60-90 tiene la hipotenusa con longitud doble que el cateto más pequeño (ver 7.5.1).

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\overline{BC}=1$, luego $\overline{AC}=2$ y por Pitágoras $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2-\overline{BC}^2=2^2-1^2=3 \Rightarrow \overline{AB}=\sqrt{3}$.

Por lo tanto está claro que $\overline{AM}=\overline{MB}=\sqrt{3}/2$.



Por Pitágoras, $\overline{MC}^2=\overline{BM}^2+\overline{BC}^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+1^2=\frac{3}{4}+1=\frac{7}{4} \Rightarrow \overline{MC}=\sqrt{\frac{7}{4}}=\frac{\sqrt{7}}{2}$.

$$\tan(\angle BMC)=\frac{\overline{BC}}{\overline{BM}}=\frac{1}{\sqrt{3}/2}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{\overline{BH}}{\overline{MH}} \Leftrightarrow \overline{BH}=\frac{2}{\sqrt{3}}\overline{MH}$$

Por el **Teorema de la Altura** en el triángulo ΔMCB, con $x=\overline{MH}$:

$$\overline{HB}^2=\overline{MH}\cdot\overline{HC} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{\sqrt{3}}x\right)^2=x\left(\frac{\sqrt{7}}{2}-x\right) \Leftrightarrow x=\frac{3}{2\sqrt{7}}$$

$$HC=\frac{\sqrt{7}}{2}-\frac{3}{2\sqrt{7}}=\frac{2}{\sqrt{7}}$$

$$\cos(\angle BMH)=\frac{3/(2\sqrt{7})}{\sqrt{3}/2}=\sqrt{\frac{3}{7}} \Rightarrow \cos(\angle AMH)=-\sqrt{\frac{3}{7}}$$

Por el **Teorema del Coseno** aplicado al triángulo ΔAMH:

$$AH^2=AM^2+MH^2-2AM\cdot MH\cdot\cos(\angle AMH)=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2\sqrt{7}}\right)^2-2\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{3}{2\sqrt{7}}\left(-\sqrt{\frac{3}{7}}\right)=$$

$$=\frac{3}{4}+\frac{9}{28}+\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\frac{3}{4}+\frac{9}{28}+\frac{3\cdot 3}{2\cdot 7}=\frac{12}{7} \Rightarrow AH=\sqrt{\frac{12}{7}}=2\sqrt{\frac{3}{7}}$$

Nuevamente por el Teorema del Coseno, ahora aplicado al triángulo ΔAHC:

$$AC^2 = AH^2 + HC^2 - 2AH \cdot HC \cdot \cos(\angle AHC) \Leftrightarrow$$

$$2^2 = \left(2\sqrt{\frac{3}{7}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)^2 - 2 \cdot 2\sqrt{\frac{3}{7}} \cdot \frac{2}{\sqrt{7}} \cdot \cos(\angle AHC) \Leftrightarrow$$

$$4 = \frac{4 \cdot 3}{7} + \frac{4}{7} - 8\frac{\sqrt{3}}{7} \cdot \cos(\angle AHC) \Leftrightarrow$$

$$\frac{12}{7} = -8\frac{\sqrt{3}}{7} \cdot \cos(\angle AHC) \Leftrightarrow -\frac{3}{2\sqrt{3}} = \cos(\angle AHC) \Leftrightarrow \angle AHC = 150º$$

Luego

$$\angle AHM = 180º - \angle AHC = 30º$$

$$\angle AHB = \angle AHM + \angle MHB = 30 + 90 = 120º$$

Y efectivamente,

$$\overline{BH} = \frac{2}{\sqrt{3}}\overline{MH} = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{3}{2\sqrt{7}} = \frac{3}{\sqrt{3}\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{3}{7}}$$

$$\overline{AH} = \sqrt{\frac{12}{7}} = 2\sqrt{\frac{3}{7}} = 2\overline{BH}$$

12.

a) Aplicamos la fórmula del área en función del seno

$$10\sqrt{3} = [\Delta ABC] = \frac{|AB| \cdot |AC| \cdot \sin\angle A}{2} = \frac{8 \cdot 5 \cdot \sin\angle A}{2} \Leftrightarrow$$

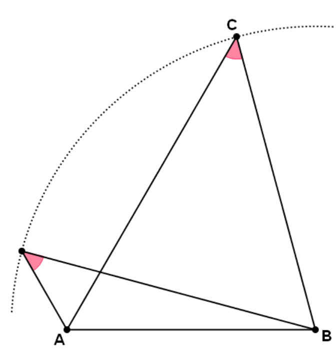
$$\sin\angle A = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \angle A = 60^{o} \vee \angle A = 120^{o}$$

Para los siguientes apartados aplicaremos el **Teorema del Seno**:

b)

$$\frac{\sin\angle A}{5\sqrt{3}} = \frac{\sin 45}{5\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{\sin\angle A}{5\sqrt{3}} = \frac{1/\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{\sin\angle A}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

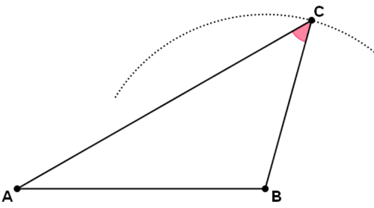
$$\sin\angle A = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \angle A = 60^{o} \vee \angle A = 120^{o}$$



c)

$$\frac{\sin\angle A}{5} = \frac{\sin 45}{5\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{\sin\angle A}{5} = \frac{1/\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sin\angle A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \angle A = 30^{o}$$

En este caso observamos que la posibilidad $\angle A = 150^{o}$ no es aceptable.



d)

$$\frac{\sin\angle A}{15} = \frac{\sin 45}{5\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sin\angle A = \frac{3}{2}$$ imposible. No hay ningún punto que satisfaga las condiciones impuestas.

13.

Primera versión.

Claramente $\angle BDA = 180 - 15 - 45 = 120º$ y $\angle ADC = 180 - 120 = 60º$

Sea $\alpha = \angle DAB$.

Aplicando el Teorema del Seno en el triángulo ΔADC:

$$\frac{AC}{\sin(\angle ADC)} = \frac{CD}{\sin\alpha} \Leftrightarrow \frac{AC}{\sin(60)} = \frac{2BD}{\sin\alpha} \Leftrightarrow$$

$$AC\sin\alpha = 2BD\sin(60) = 2BD\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}BD \Leftrightarrow \frac{\sin\alpha}{\sqrt{3}} = \frac{BD}{AC}$$

Aplicando el Teorema del Seno en el triángulo ΔABC:

$$\frac{3BD}{\sin(15+\alpha)} = \frac{AC}{\sin(45)} \Leftrightarrow AC\sin(15+\alpha) = 3BD\sin(45)$$

$$\Leftrightarrow \sin(15+\alpha) = 3\frac{BD}{AC}\sin(45) = 3\frac{BD}{AC}\frac{1}{\sqrt{2}} = 3\frac{\sin\alpha}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\sin(\alpha)$$

Aplicando la fórmula del seno de la suma:

$$\sin(15)\cos(\alpha) + \sin(\alpha)\cos(15) = \sin(15+\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\sin(\alpha) \Leftrightarrow$$

$$\sin(15)\cos(\alpha) + \sin(\alpha)\cos(15) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\sin(\alpha) \Leftrightarrow$$

$$\sin(15)\cos(\alpha) + \left(\cos(15) - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)\sin(\alpha) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sin(15)\cos(\alpha) = \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \cos(15)\right)\sin(\alpha) \Leftrightarrow$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{\sin(15)}{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \cos(15)} = (1)$$

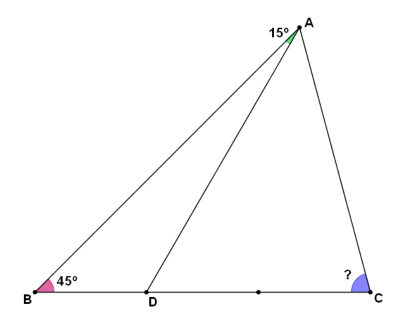
Puesto que $\sin(15) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ y $\cos(15) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$, tenemos

$$(1) = \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3} - \sqrt{3} - 1} = 1$$

Es decir, $\tan(\alpha) = 1 \Leftrightarrow \alpha = 45º$. Finalmente, $\angle ACB = 180 - 60 - \alpha = 75º$.

Segunda versión.

Esta figura la podemos construir de la siguiente manera: Fijamos el segmento $\overline{BC}$ y tomamos un punto D en su interior de forma que $2|BD| = |CD|$. Ahora trazamos un rayo r con origen en B a 45º con $\overline{BC}$. Sea A un punto de r. A medida que el punto A se aleja de B, el ángulo $\angle BAD$ se va haciendo cada vez más pequeño, luego existirá un punto para el cual $\angle BAD = 45º$.



Sea $\alpha = \angle DAC$.

Aplicando el Teorema del Seno al triángulo ΔACD:

$$\frac{CD}{\sin\alpha} = \frac{CA}{\sin 60} \Leftrightarrow CA = \frac{CD\sin 60}{\sin\alpha}$$

Aplicando el Teorema del Seno al triángulo ΔABC:

$$\frac{BC}{\sin(\alpha+15)} = \frac{CA}{\sin 45} \Leftrightarrow CA = \frac{BC\sin 45}{\sin(\alpha+15)}$$

Luego

$$\frac{CD\sin 60}{\sin\alpha} = \frac{BC\sin 45}{\sin(\alpha+15)} \Leftrightarrow \frac{CD\sin(\alpha+15)}{BC\sin\alpha} = \frac{\sin 45}{\sin 60}$$

Por otro lado:

$$CD = 2BD \Leftrightarrow BC = BD + CD = BD + 2BD = 3BD$$

$$3CD = 6BD = 2BC \Leftrightarrow \frac{CD}{BC} = \frac{2}{3}$$

Y también:

$$\sin 45 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{\sin 45}{\sin 60} = \frac{1/\sqrt{2}}{\sqrt{3}/2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow \left(\frac{\sin 45}{\sin 60}\right)^2 = \frac{2}{3} = \frac{CD}{BC}$$

Con lo que llegamos a:

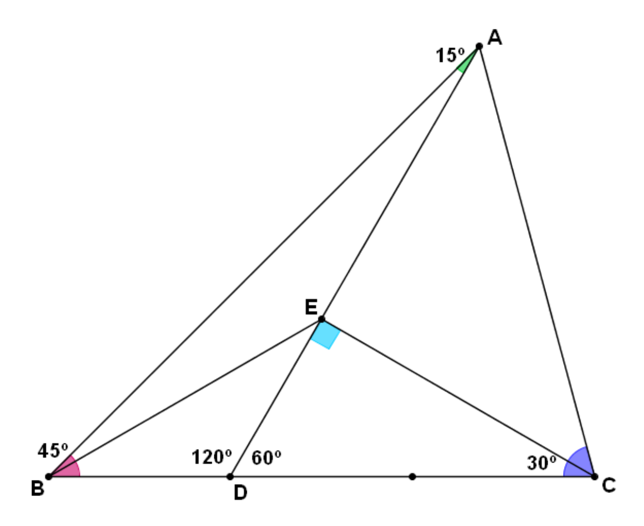
$$\left(\frac{\sin 45}{\sin 60}\right)^2 \frac{\sin(\alpha+15)}{\sin\alpha} = \frac{\sin 45}{\sin 60}$$

Está claro (para el autor del libro donde he encontrado esta solución) que esta ecuación sólo tiene una solución que es $\alpha = 45º$. Por la unicidad de la construcción, tendremos $\angle ACD = 180 - 60 - 45º = 75º$.

Fuente: **[Andreescu]** pág. 25

Tercera versión:

Determinamos el punto E del segmento $\overline{AD}$ tal que $EC \perp AD$. Luego $\angle ECD = 30^o$.



$\frac{DE}{CD} = \sin\angle ECD = \sin 30^o = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2DE = CD = 2BD \Leftrightarrow DE = BD$.

Así pues, el triángulo ΔBDE es isósceles, luego $\angle DBE = \angle BED = 30^o$.

De lo que deducimos que $\angle DBE = \angle DCE = 30^o$ y por lo tanto el triángulo ΔBEC

Es isósceles, y en consecuencia $BE = CE$.

Por otro lado, $\angle EBA = \angle DBA - \angle DBE = 45 - 30 = 15^o = \angle BAE$, luego el triángulo ΔBEA también es isósceles, por lo que resulta $BE = CE = AE$.

Así pues, el triángulo ΔACE es rectángulo y isósceles, luego $\angle EAC = \angle ECA = 45^o$.

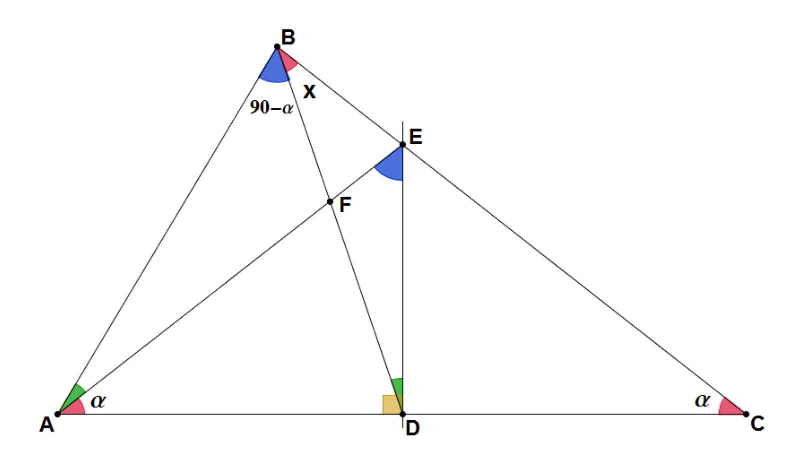
De lo que deducimos $\angle ACD = 30^o + 45^o = 75^o$.

Fuente: **[Andreescu]** pág. 25

14.

Trazamos la mediatriz de $\overline{AC}$ y sea E su punto de corte con $\overline{BC}$. Obtenemos así dos triángulos rectángulos congruentes ΔADE y ΔCDE. Luego $\angle DAE = \alpha$. Sea F el punto de corte de $\overline{AE}$ y $\overline{BD}$.

$\angle DAE = \alpha \Rightarrow \angle AED = 90 - \alpha$, luego los triángulos ΔBAF y ΔEDF son semejantes (criterio AA). Luego $\angle BAF \cong \angle FDE$.



El cuadrilátero $\Diamond ADEB$ es cíclico, puesto que el ángulo entre un lado y una diagonal es igual al ángulo entre el lado contrario y la otra diagonal (9.5.4). Luego tomando esta misma propiedad característica de los cuadriláteros cíclicos pero con los lados contrarios llegamos al resultado deseado: $\alpha = x$.

15.

Si $PB = 3x$ entonces $PD = 8x$.

Por ser un cuadrilátero cíclico, $\angle BAP = \angle CDP$, luego los triángulos ΔABP y ΔDCP son semejantes (criterio AA). Luego

$$\frac{AB}{DC} = \frac{AP}{DP} = \frac{BP}{PC} \Leftrightarrow \frac{1}{4} = \frac{AP}{8x} = \frac{3x}{PC} \Rightarrow \begin{cases} AP = 2x \\ PC = 12x \end{cases}$$

De la misma manera, $\angle ADP = \angle BCP$, luego ΔAPD y ΔBPC son semejantes y por tanto

$$\frac{d}{b} = \frac{AP}{BP} \Rightarrow \frac{d}{b} = \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3d = 2b$$

Sabemos que por ser un cuadrilátero con circunferencia inscrita la suma de lados opuestos es la misma (9.1.13), es decir, $a + c = b + d \Leftrightarrow 1 + 4 = b + d$

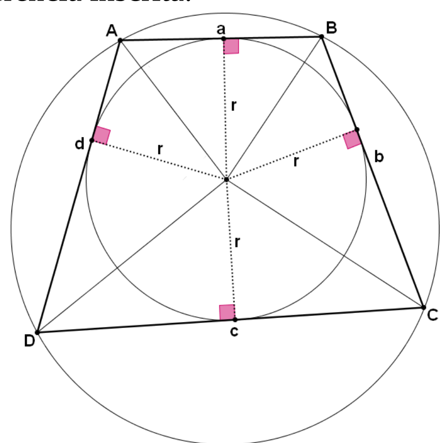
$$\text{Luego} \begin{cases} 3d = 2b \\ 5 = b + d \Rightarrow 5 = \frac{3}{2}d + d = \frac{5}{2}d \Rightarrow d = 2 \Rightarrow b = 3 \end{cases}$$

Tenemos, pues, los cuatro lados determinados: $a = 1, b = 3, c = 4, d = 2$.

Aplicando la fórmula de Brahmagupta (9.5.12) a nuestro cuadrilátero,

$$Área = \sqrt{abcd} = \sqrt{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \sqrt{24}$$

Pero también podemos determinar el área dividiendo el cuadrilátero en cuatro triángulos, cada triángulo tiene como base uno de los lados del cuadrilátero y como altura el radio a la circunferencia inscrita:



$$Área = \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} + \frac{c \cdot r}{2} + \frac{d \cdot r}{2} = \frac{r(a+b+c+d)}{2} = \frac{r}{2}(1+2+3+4) = 5r$$

Luego $5r = \sqrt{24} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{24}}{5} \Rightarrow r^2 = \frac{24}{25}$

El área de la circunferencia inscrita es $\pi r^2 = \pi \frac{p}{q} \Leftrightarrow r^2 = \frac{p}{q} = \frac{24}{25}$

La fracción es irreducible, por lo tanto $p = 24, q = 25$.

Luego $p + q = 24 + 25 = 49$

Fuente: https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php?title=Mock_AIME_3_Pre_2005_Problems/Problem_7

16.

Sea $x = \left|\overline{PA}\right|$, $y = \left|\overline{PB}\right|$ y $z = \left|\overline{PC}\right|$. Aplicando el Teorema del coseno a los triángulos ΔAPC, ΔBPC y ΔAPB tenemos:

$$x^2 = 15^2 + z^2 - 2 \cdot 15 \cdot z \cdot \cos(\alpha)$$
$$y^2 = 13^2 + x^2 - 2 \cdot 13 \cdot x \cdot \cos(\alpha)$$
$$z^2 = 14^2 + y^2 - 2 \cdot 14 \cdot y \cdot \cos(\alpha)$$

Sumando las tres igualdades anteriores llegamos a

$$x^2 + y^2 + z^2 = 15^2 + 13^2 + 14^2 + x^2 + y^2 + z^2 - 2\cos(\alpha)(13x + 14y + 15z)$$

es decir,

$$0 = 15^2 + 13^2 + 14^2 - 2\cos(\alpha)(13x + 14y + 15z)$$

Por otro lado, calculando el área del triángulo ΔABC como suma de las áreas de los tres triángulos por separado:

$$A = \frac{15x\sin(\alpha)}{2} + \frac{14y\sin(\alpha)}{2} + \frac{13x\sin(\alpha)}{2} = \frac{\sin(\alpha)}{2}(15x + 14y + 13x)$$

Luego

$$0 = 15^2 + 13^2 + 14^2 - 2\cos(\alpha)(13x + 14y + 15z) = 15^2 + 13^2 + 14^2 - 2\cos(\alpha)\frac{2A}{\sin(\alpha)} =$$

$$0 = 15^2 + 13^2 + 14^2 - \frac{4A}{\tan(\alpha)} \Leftrightarrow \frac{4A}{\tan(\alpha)} = 15^2 + 13^2 + 14^2$$

$$\tan(\alpha) = \frac{4A}{15^2 + 13^2 + 14^2}$$

Pero el área del triángulo lo podemos calcular por la fórmula de Heron:

$$s = (13 + 14 + 15)/2 = 21$$

$$A = \sqrt{s(s-13)(s-14)(s-15)} = 84$$

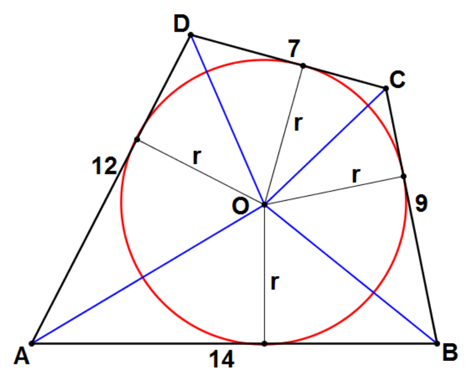
Finalmente $\tan(\alpha) = \dfrac{4A}{15^2 + 13^2 + 14^2} = \dfrac{168}{295}$ fracción irreducible, luego

$$m + n = 168 + 295 = 463.$$

Fuente: **[Andreescu]** pág. 40.

17.

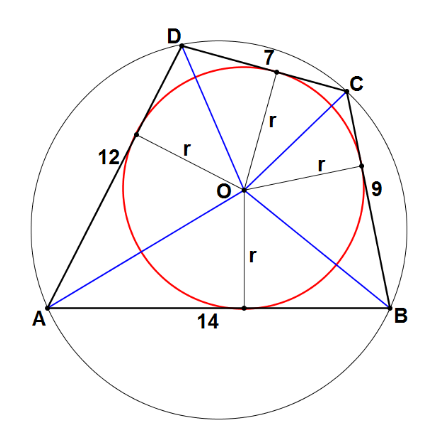
Puesto que $7+14=9+12$, este cuadrilátero posee una circunferencia inscrita (9.1.13), que naturalmente será la circunferencia más grande que podemos dibujar en su interior. Sea O su centro.



Este centro O divide el cuadrilátero en cuatro triángulos con alturas iguales al radio, puesto que la circunferencia es tangente a cada uno de los lados. Por lo tanto el área del cuadrilátero será

$$\acute{A}rea=\frac{AB\cdot r}{2}+\frac{BC\cdot r}{2}+\frac{CD\cdot r}{2}+\frac{DA\cdot r}{2}=\frac{r}{2}(AB+BC+CD+DA)=\frac{42}{2}r=21r$$

Pero por otro lado, entre todos los cuadriláteros el que tiene área máxima (y por tanto una circunferencia inscrita mayor) es el cuadrilátero cíclico (9.5.15),



Y por lo tanto el área de este cuadrilátero se puede calcular mediante la fórmula de Brahmagupta adaptada a cuadriláteros con circunferencia inscrita (9.5.12)

$$\acute{A}rea=\sqrt{14\cdot 9\cdot 7\cdot 12}=42\sqrt{6}$$

Así pues, $21r=42\sqrt{6}\Rightarrow r=\frac{42\sqrt{6}}{21}=2\sqrt{6}$

Fuente de la solución: https://www.maa.org/sites/default/files/pdf/CurriculumInspirations/CB091_The-Biggest-Circle.pdf

18.

Sea $a=\left|\overline{BC}\right|$, $b=\left|\overline{AC}\right|$ y $c=\left|\overline{AC}\right|$.

Podemos calcular el área de este triangulo de dos maneras:
Con base c y altura a:

$$\acute{A}rea=\frac{c\cdot b}{2}$$

Con base a y altura $\overline{AD}$: $\acute{A}rea=\frac{(96/5)a}{2}$

Luego

$$\frac{c\cdot b}{2}=\frac{(96/5)a}{2}\Leftrightarrow c\cdot b=\frac{96a}{5}$$

Por Pitágoras tenemos $a^2=b^2+c^2$.
Por hipótesis tenemos $a+b+c=96\Rightarrow a=96-b-c$
Luego

$$(96-b-c)^2=b^2+c^2\Leftrightarrow 9216-192b+b^2-192c+c^2+2bc=b^2+c^2\Leftrightarrow$$

$$9216-192b-192c+2bc=0\Leftrightarrow 4608-96b-96c+bc=0\Leftrightarrow$$

$$4608-96b-96c+\frac{96a}{5}=0\Leftrightarrow 4608-96\left(b+c-\frac{a}{5}\right)=0 \quad (1)$$

$$a+b+c=96\Rightarrow b+c=96-a$$

$$(1)\Leftrightarrow 4608-96\left(96-a-\frac{a}{5}\right)=0\Leftrightarrow 4608-96\left(96-\frac{6a}{5}\right)=0\Leftrightarrow 4608=96\left(96-\frac{6a}{5}\right)$$

$$\Leftrightarrow 48=96-\frac{6a}{5}\Leftrightarrow -48=-\frac{6a}{5}\Leftrightarrow a=40$$

Nos queda el sistema

$$\begin{cases}40^2=b^2+c^2\\40+b+c=96\end{cases}$$

$$b+c=56\Rightarrow b=56-c\Rightarrow 40^2=(56-c)^2+c^2\Leftrightarrow$$

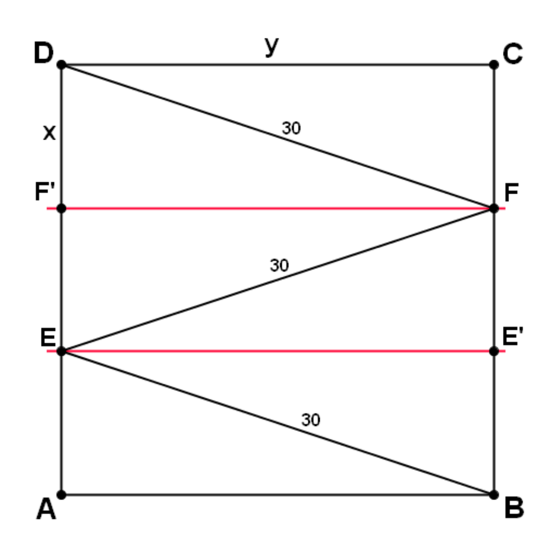
$$40^2=56^2-112c+c^2+c^2\Leftrightarrow 40^2=56^2-112c+2c^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}c=24\Rightarrow b=32\\c=32\Rightarrow b=24\end{cases}$$

Luego la solución será 24, 32 y 40.

19.

Trazamos los segmentos FF’ y EE’ perpendiculares a AD y BC:



Sea $x = \left|\overline{DF'}\right|$, $y = \left|\overline{CD}\right|$.

El triángulo ΔDFE es isósceles, luego coincide su altura FF' con su mediana, por lo que F' es el punto medio de la base: $DF' \cong F'E$.

Por translación paralela $F'E \cong FE'$, y podemos aplicar el mismo argumento para el triángulo ΔFEB: $F'E' \cong E'B \cong EA$.

Luego, por ser un cuadrado, $y = 3x$, y por Pitágoras, $x^2 + y^2 = 30^2$.

$x^2 + (3x)^2 = 30^2 \Leftrightarrow x^2 + 9x^2 = 30^2 \Leftrightarrow 10x^2 = 30^2 \Leftrightarrow x^2 = 90 \Leftrightarrow x = 3\sqrt{10}$

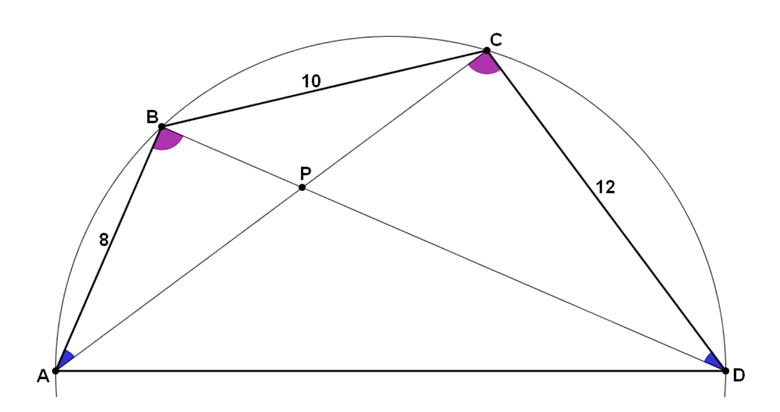
$y = 3x = 9\sqrt{10}$

$\acute{A}rea = \left(9\sqrt{10}\right)^2 = 81 \cdot 10 = 810$.

20.

Primera versión:

Trazamos las diagonales del cuadrilátero BD y AC. Sea P su punto de corte.



Por ser un cuadrilátero cíclico tenemos que $\angle BAP \cong \angle PDC$ y $\angle ABP \cong \angle PCD$, esto es, que los triángulos ΔABP y ΔDCP son semejantes. Luego

$$\frac{AB}{AP}=\frac{CD}{DP} \Leftrightarrow \frac{8}{AP}=\frac{12}{DP} \Leftrightarrow 8DP = 12AP \Leftrightarrow 2DP = 3AP$$

y de la misma forma $2PC = 3BP$.

Por ser cuadrilátero cíclico tenemos igualmente que $\angle PBC \cong \angle PAD$ y $\angle PCB \cong \angle PDA$, esto es, que los triángulos ΔBPC y ΔAPD son semejantes. Luego

$$\frac{BC}{BP}=\frac{AD}{AP} \Leftrightarrow \frac{10}{BP}=\frac{AD}{AP} \Leftrightarrow 10AP = AD\cdot BP$$

Por ser AD un diámetro de la circunferencia los ángulos $\angle ABD$ y $\angle ACD$ son rectos, luego los triángulos ΔABD y ΔACD son triángulos rectángulos, luego

$$AD^2 = AB^2 + (BP+DP)^2 \Leftrightarrow AD^2 = 8^2 + (BP+DP)^2$$

y $AD^2 = CD^2 + (AP+CP)^2 \Leftrightarrow AD^2 = 12^2 + (AP+CP)^2$

Así pues, este problema se reduce a resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2DP = 3AP \\ 2PC = 3BP \\ AD^2 = 8^2 + (BP+DP)^2 \\ AD^2 = 12^2 + (AP+CP)^2 \\ 10AP = AD\cdot BP \end{cases}$$

$DP = \frac{3}{2}AP,\ PC = \frac{3}{2}BP,\ AP = \frac{AD\cdot BP}{10}$, luego

$$\begin{cases} AD^2 = 8^2 + BP^2 + DP^2 + 2BP \cdot DP \\ AD^2 = 12^2 + AP^2 + CP^2 + 2AP \cdot CP \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} AD^2 = 8^2 + BP^2 + \dfrac{9}{400} AD^2 BP^2 + \dfrac{3}{10} BP^2 \cdot AD \\ AD^2 = 12^2 + \dfrac{AD^2 BP^2}{100} + \dfrac{9}{4} BP^2 + \dfrac{3}{10} BP^2 \cdot AD \end{cases}$$

$$\begin{cases} AD^2 = 8^2 + BP^2 \left(1 + \dfrac{9}{400} AD^2 + \dfrac{3}{10} AD \right) \\ AD^2 = 12^2 + BP^2 \left(\dfrac{AD^2}{100} + \dfrac{9}{4} + \dfrac{3}{10} AD \right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{AD^2 - 8^2}{1 + \dfrac{9}{400} AD^2 + \dfrac{3}{10} AD} = BP^2 \\ \dfrac{AD^2 - 12^2}{\dfrac{AD^2}{100} + \dfrac{9}{4} + \dfrac{3}{10} AD} = BP^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\frac{AD^2 - 8^2}{1 + \dfrac{9}{400} AD^2 + \dfrac{3}{10} AD} = \frac{AD^2 - 12^2}{\dfrac{AD^2}{100} + \dfrac{9}{4} + \dfrac{3}{10} AD}$$

Nombrando $x = AD$, la ecuación anterior, después de sucesivas simplificaciones acaba reduciéndose a

$$x^3 - 308x - 1920 = 0$$

Estamos ante una ecuación que podemos resolver mediante Mathematica o cualquier otro paquete numérico:

$$x = \begin{cases} -12.351 \\ -7.73817 \\ 20.0892 \end{cases}$$

La única solución aceptable para nosotros es la positiva: $x = 20.0892$.

En la página web del enunciado encontramos dos soluciones alternativas:

Segunda versión.
Aplicamos Pitágoras a los dos triángulos rectángulos ΔABD y ΔACD:

$$AD^2 = 8^2 + BD^2 \Rightarrow \sqrt{AD^2 - 8^2} = BD$$

$$AD^2 = 12^2 + AC^2 \Rightarrow \sqrt{AD^2 - 12^2} = AC$$

Y el teorema de Ptolomeo:

$$BD \cdot AC = 8 \cdot 12 + 10 \cdot AD \Rightarrow \sqrt{AD^2 - 8^2} \cdot \sqrt{AD^2 - 12^2} = 96 + 10AD \Rightarrow$$

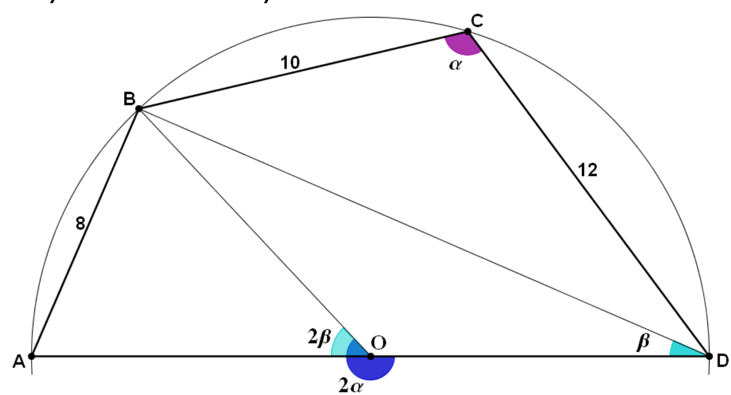
$$\left(AD^2 - 8^2\right)\left(AD^2 - 12^2\right) = \left(96 + 10AD\right)^2 \Rightarrow$$

$$AD^4 - 144AD^2 - 64AD^2 + 9216 = 9216 + 1920AD + 100AD^2$$

que nuevamente, con $x = AD$, es la ecuación anterior:

$$x^3 - 308x - 1920 = 0$$

Tercera versión.
Marcamos el centro O de la circunferencia y la diagonal BD.
Si $\beta = \angle ODB \Rightarrow \angle AOB = 2\beta$
Si $\alpha = \angle BCD \Rightarrow 2\beta + 180 = 2\alpha \Rightarrow \beta + 90 = \alpha$



Luego aplicando el Teorema del Coseno al triángulo ΔBDC :

$$BD^2 = 10^2 + 12^2 - 2 \cdot 10 \cdot 12 \cdot \cos(\alpha) \Leftrightarrow$$

$$BD^2 = 244 - 240\cos(\beta + 90) \Leftrightarrow$$

$$BD^2 = 244 + 240\sin(\beta) \quad (1)$$

Pero por otro lado, puesto que ΔABD es un triángulo rectángulo,

$$BD^2 = AD^2 - 8^2 \text{ y } \sin(\beta) = \frac{8}{AD}$$

Y por tanto (1) se convierte en

$$AD^2 - 64 = 244 + 240\frac{8}{AD} \Leftrightarrow AD^3 - 64AD = 244AD + 1920$$

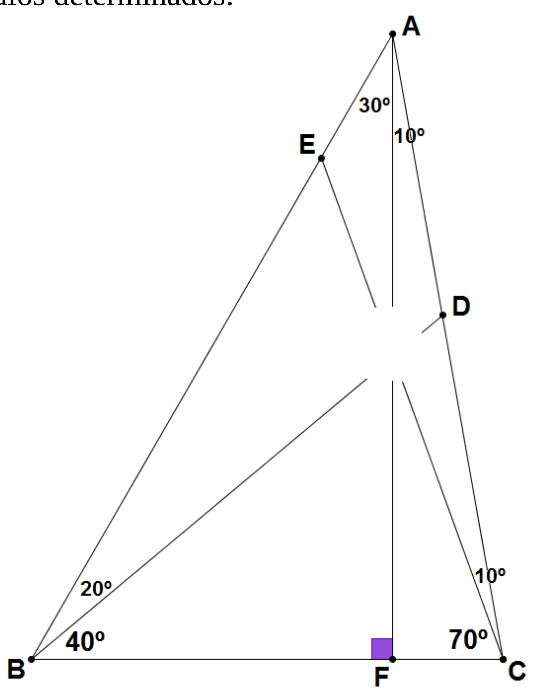
$$\Leftrightarrow AD^3 - 64AD - 244AD - 1920 = 0$$

$$\Leftrightarrow AD^3 - 308AD - 1920 = 0$$

Nuevamente llegamos a la misma ecuación de tercer grado.

21.

Trazamos la altura por el punto A. Sea F su punto de corte con BC.
Tenemos todos los ángulos determinados:



Aplicamos la versión trigonométrica del Teorema de Ceva:

$\sin\angle ABD = \sin 20^{o}$

$\sin\angle BAF = \sin 30^{o} = 1/2$

$\sin\angle BCE = \sin 70^{o} = \cos 20^{o}$

$\sin\angle CBD = \sin 40^{o}$

$\sin\angle FAC = \sin 10^{o}$

$\sin\angle ACE = \sin 10^{o}$

$$\frac{\sin\angle ABD \sin\angle BCE \sin\angle FAC}{\sin\angle BAF \sin\angle CBD \sin\angle ACE} = \frac{\sin 20 \sin 70 \sin 10}{\sin 30 \sin 40 \sin 10} =$$

$$= \frac{\sin 20 \sin 70}{\sin 30 \sin 40} = \frac{\sin 20 \cos 20}{\sin 30 \sin 40} = \frac{(1/2)\sin 40}{\sin 30 \sin 40} = \frac{1/2}{1/2} = 1$$

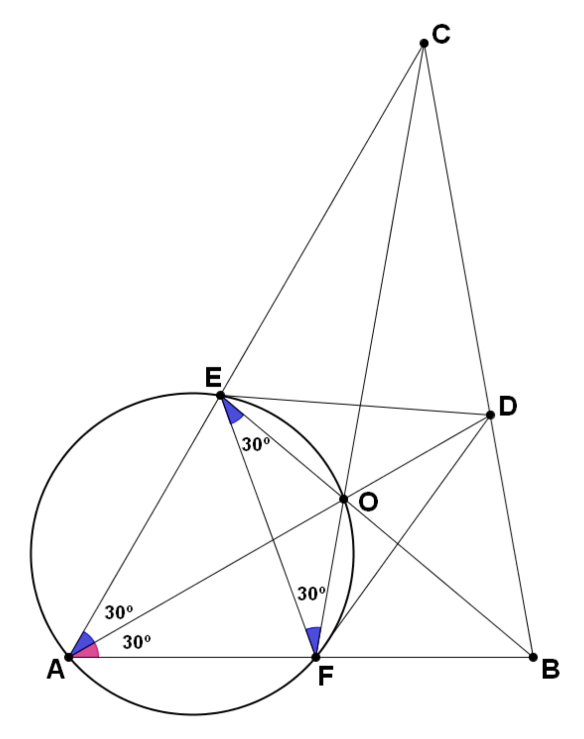
Donde hemos aplicado la igualdad $\sin 2a = 2\sin a \cos a$

Luego las rectas AF, CE y DB son concurrentes en un punto P. Así pues, la recta AP pasará por F con un ángulo de 90º, tal y como queríamos ver.

22.

a) Sea $\alpha = \angle ACF = \angle FCB$.
$180 = 60 + 2\alpha + 2\angle ABE \Rightarrow \angle ABE = 60 - \alpha$
$180 = \angle CEB + 2\alpha + 60 - \alpha \Rightarrow \angle CEB = 120 - \alpha$
$\angle AEO = 180 - 30 - 60 - \alpha = 90 - \alpha$
$\angle AEF = 180 - 120 + \alpha = 60 + a$
$\angle EOA = 180 - 30 - 60 - \alpha = 90 - \alpha$
$\angle CAF = 180 - 60 - \alpha = 120 - \alpha$
$\angle AOF = 180 - 30 - 120 + \alpha = 30 + \alpha$
Luego $\angle EOF = 90 - \alpha + 30 + \alpha$ y el cuadrilátero $\lozenge AFOE$ tiene ángulos opuestos que suman 180º:
$\angle EAF + \angle EOF = 60 + 120 = 180$
$\angle AEO + \angle AFO = 60 + \alpha + 120 - \alpha = 180$
Por lo que es un cuadrilátero cíclico.

Y por ser un cuadrilátero cíclico cumple $\angle EFO = \angle EAO = 30^\circ$ y $\angle FEO = \angle OAF = 30^\circ$, luego el triángulo ΔEFO es isósceles y en consecuencia $\overline{EO} \cong \overline{OF}$



b) Trazamos la bisectriz $\overline{AD}$. Su punto de corte con $\overline{CF}$ será el incentro O, y obtenemos la configuración del apartado a. En particular, la bisectriz por el vértice B se encuentra con el lado $\overline{AC}$ en un punto, digamos E', tal que $\angle CFE' = 30^\circ = \angle CFE$. Luego $E = E'$ y podemos deducir todos los resultados del apartado anterior, en particular $\overline{EO} \cong \overline{OF}$.

23.

En primer lugar está claro que $2\alpha+2\beta+120=180\Rightarrow\alpha+\beta=30\Rightarrow\beta=30-\alpha$

Vamos a ver que $\angle ADE=60-\alpha$ y $\angle FDC=60-\beta=60-(30-\alpha)=30+\alpha$, con lo que habremos probado que

$\angle EDF=180-\angle ADE-\angle FDC=180-60+\alpha-30-\alpha=90º$

Sea P el incentro, el punto de corte de las bisectrices.

$180=\alpha+120+\angle BFA\Rightarrow\angle BFA=60-\alpha$

$180=60+\angle BPC+\angle BCP=60+\angle BPF+30-\alpha\Rightarrow\angle BPF=90+\alpha$

$180=\angle BEC+120+30-\alpha\Rightarrow\angle BEC=180-120-30+\alpha=30+\alpha$

$180=\angle BPA+60+\alpha\Rightarrow\angle BPA=180-60-\alpha=120-\alpha$

$180=\angle BEP+60+\angle EPB=30+\alpha+60+\angle EPB\Rightarrow$

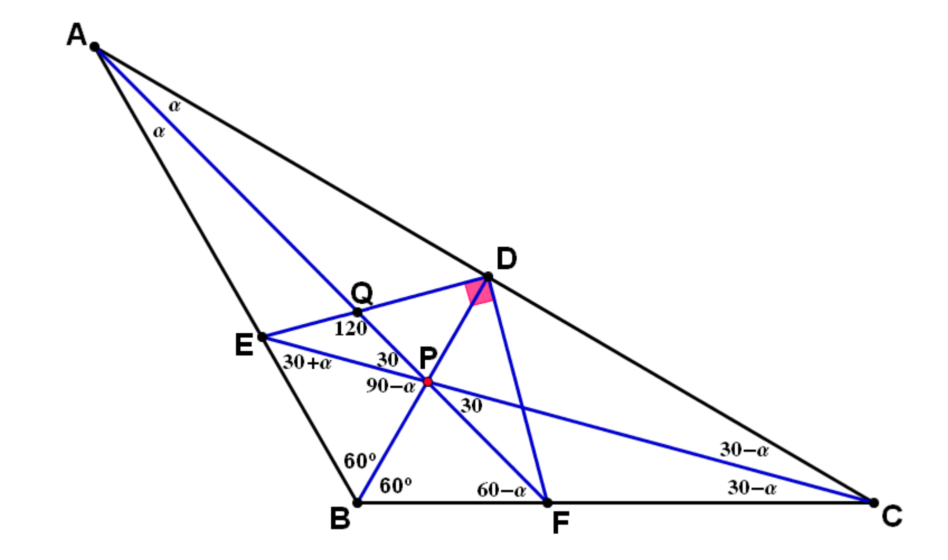
$\angle EPB=180-30-60-\alpha=90-\alpha$

De lo que deducimos que $\angle APE=\angle BPA-\angle EPB=120-\alpha-90+\alpha=30º$

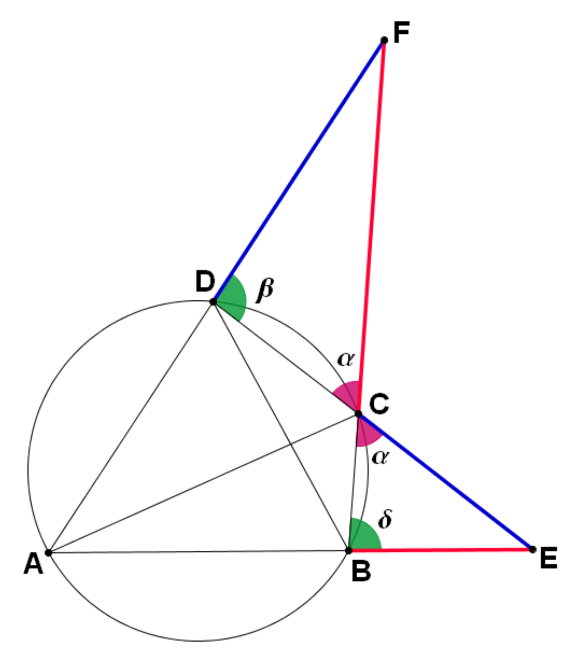
Sea Q el punto de corte de $\overline{ED}$ y $\overline{AP}$. En el triángulo ΔABD aparece la configuración del problema anterior #22, apartado b, luego $EQ=QP$, el triángulo ΔEQP es isósceles, $\angle PEQ=\angle APE=30º$ y $\angle EQP=180-30-30=120=\angle AQD$

Y finalmente $180=\alpha+\angle ADQ+\angle AQD=\alpha+\angle ADQ+120\Rightarrow\angle ADQ=60-\alpha$.

La igualdad $\angle FDC=60-\beta=60-(30-\alpha)=30+\alpha$ es simétrica a la anterior, y se demuestra de la misma manera.



24.
Claramente $\alpha = \angle FCD = \angle BCE$ por ser ángulos opuestos por el vértice, y $\beta = \angle FDC$ y $\delta = \angle CBE$ son ángulos suplementarios, por ser $\lozenge ABCD$ cíclico. Por lo tanto $\sin\beta = \sin\delta$.



El área del triángulo ΔCDF se puede calcular de dos maneras diferentes:

$$[\Delta CDF] = CD \cdot CF \cdot \sin\alpha = DF \cdot CD \cdot \sin\beta \Rightarrow \frac{CD \cdot CF \cdot \sin\alpha}{DF \cdot CD \cdot \sin\beta} = 1$$

Y lo mismo pasa con el área del triángulo ΔBCE:

$$[\Delta BCE] = BC \cdot BE \cdot \sin\delta = BC \cdot CE \cdot \sin\alpha \Rightarrow \frac{BC \cdot CE \cdot \sin\alpha}{BC \cdot BE \cdot \sin\delta} = 1$$

Luego

$$\frac{CD \cdot CF \cdot \sin\alpha}{DF \cdot CD \cdot \sin\beta} = \frac{BC \cdot CE \cdot \sin\alpha}{BC \cdot BE \cdot \sin\beta} \Leftrightarrow \frac{CF}{DF} = \frac{CE}{BE} \Leftrightarrow CF \cdot BE = CE \cdot DF$$

Segunda versión:
En la página web del enunciado encontramos un desarrollo alternativo mediante el teorema del seno:

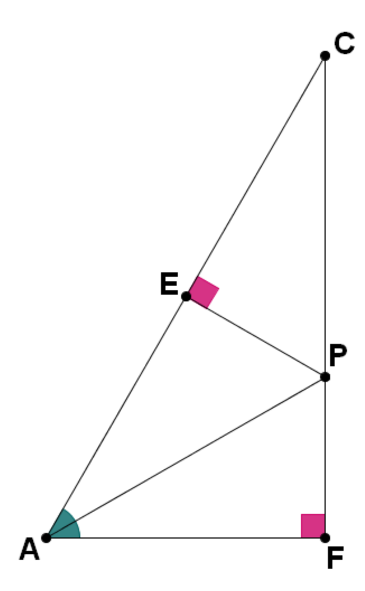
$$\frac{\sin\beta}{CF} = \frac{\sin\alpha}{DF} \Leftrightarrow \frac{DF}{CF} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

$$\frac{\sin\delta}{CE} = \frac{\sin\alpha}{BE} \Leftrightarrow \frac{BE}{CE} = \frac{\sin\alpha}{\sin\delta} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

de donde se deduce fácilmente el resultado.

25.

Sea F el punto de corte de la altura por C y el segmento $\overline{AB}$ y E el punto medio de $\overline{AC}$. Basta con quedarnos con el triángulo rectángulo ΔAFC de la izquierda, y demostrar que la bisectriz por A y la mediatriz por E se cortan en un punto P del lado CF.



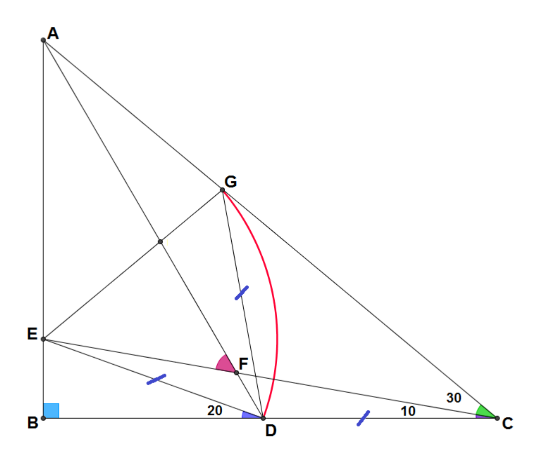
Sea P el punto de corte de la bisectriz por A y el lado CF. $\angle CAP = \angle PCA = 30º$, luego ΔAPC es un triángulo isósceles. Por ser isósceles, la mediatriz de AC coincidirá con la altura por P, es decir, que la mediatriz pasa por P.

26.

Claramente tenemos $\angle BED = 180 - 90 - 20 = 70^o$, $\angle BAC = 180 - 90 - 40 = 50^o$, $\angle CEA = 180 - 30 - 50 = 100^o$.

De todo esto deducimos que $\angle DEC = 180 - 100 - 70 = 10^o$, y por tanto el triángulo ΔDEC es isósceles en D, y en consecuencia $\overline{DE} \cong \overline{CD}$. Esto nos da una pista del segmento que debemos añadir al esquema para poder resolver el problema.

Sea G el punto del lado $\overline{AC}$ tal que $\overline{DE} \cong \overline{DG}$.



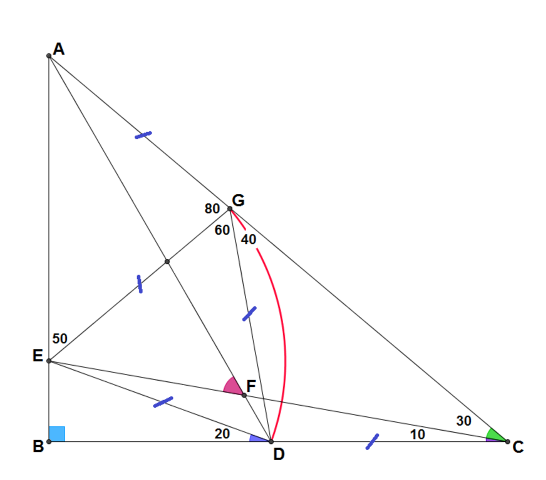
El triángulo ΔDCG es isósceles en D, luego $\angle DGC = \angle DCG = 40^o$ y $\angle GDC = 100^o$.

Luego $\angle EDG = 180 - 20 - 100 = 60^o$.

El triángulo ΔEDG es isósceles con un ángulo de 60º, por lo tanto es equilátero y sus tres ángulos son de 60º: $\overline{EG} = \overline{ED} = \overline{DG} = \overline{DC}$, $\angle EGD = \angle DEG = \angle EDG = 60^o$.

El triángulo ΔAGE cumple $\angle AEG = 180 - 70 - 60 = 50 = \angle EAG$, luego es isósceles en A, y por tanto $\overline{AG} = \overline{EG}$.

Ahora $\angle AGE = 180 - 60 - 40 = 80^o$, luego tenemos un triángulo ΔAGD, isósceles en G, con $\angle AGD = 80 + 60 = 140^o$.

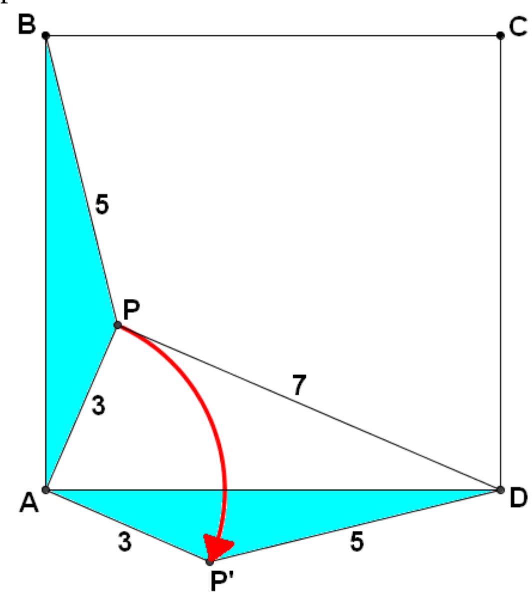


Luego $\angle DAG = \angle ADG = 20^o$. Y por tanto $\angle BAD = 50 - 20 = 30^o$, y finalmente $\angle EFA = 180 - 100 - 30 = 50^o$.

27.

Primera versión.

Rotamos 90º el triángulo ΔAPB hasta hacer coincidir el lado AB con el lado AD. El punto P pasará a ser el punto P':



$\angle P'AP = 90^o$, $AP' = AP$, luego $\Delta APP'$ es un triángulo isósceles rectángulo, y por tanto $PP' = \sqrt{3^2+3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$, y $\angle APP' = (180-90)/2 = 45^o$

El área del triángulo $PP'D$ se puede calcular mediante la fórmula de Heron:

$$s = \frac{7+5+3\sqrt{2}}{2} = \frac{12+3\sqrt{2}}{2}$$

$$[PP'D] = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{12+3\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{12+3\sqrt{2}}{2}-7\right)\left(\frac{12+3\sqrt{2}}{2}-5\right)\left(\frac{12+3\sqrt{2}}{2}-3\sqrt{2}\right)} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{12+3\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{3\sqrt{2}-2}{2}\right)\left(\frac{2+3\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{12-3\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{21}{2}$$

Esta misma área se puede calcular mediante la fórmula

$$[PP'D] = \frac{|PD|\cdot|PP'|\sin(\angle P'PD)}{2}$$

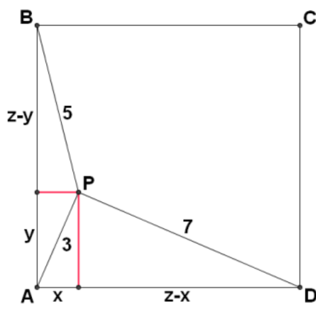
Luego $\frac{21}{2} = \frac{7\cdot 3\sqrt{2}\cos(\angle P'PD)}{2} \Rightarrow \sin(\angle PP'D) = \frac{21}{7\cdot 3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \angle P'PD = 45^o$.

Finalmente, $\angle APD = \angle APP' + \angle P'PD = 45+45 = 90^o$, y el triángulo ΔAPD es recto. Por lo tanto, podemos calcular su hipotenusa por Pitágoras:

$AD^2 = 3^2 + 7^2 = 9 + 49 = 58$, que será el área del cuadrado.

Fuente: Challenging Problems in Geometry (Alfred S. Posamentier) Página 156.

Segunda versión.
Mediante un sistema de ecuaciones. Trazando perpendiculares al punto P, y aplicando Teorema de Pitágoras:



Convertimos el problema en un sistema de 3 ecuaciones de segundo grado:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 3^2 \\ y^2 + (z-x)^2 = 7^2 \\ x^2 + (z-y)^2 = 5^2 \end{cases}$$

Sumamos segunda y tercera ecuación:

$$x^2 + (z-y)^2 + y^2 + (z-x)^2 = 5^2 + 7^2 \Rightarrow (z-y)^2 + (z-x)^2 = 5^2 + 7^2 - 3^2 \Rightarrow$$

$$z^2 - 2zy + y^2 + z^2 - 2zx + x^2 = 5^2 + 7^2 - 3^2 \Rightarrow$$

$$2z^2 - 2z(x+y) = 5^2 + 7^2 - 3^2 - 3^2 = 56 \Rightarrow$$

$$z^2 - z(x+y) = 28$$

$$z(z-x-y) = 28$$

Desarrollando segunda y tercera ecuación:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 3^2 \\ y^2 + (z-x)^2 = 7^2 \Rightarrow y^2 + z^2 - 2xz + x^2 = 7^2 \Rightarrow 3^2 + z^2 - 2xz = 7^2 \\ x^2 + (z-y)^2 = 5^2 \Rightarrow x^2 + z^2 - 2yz + y^2 = 5^2 \Rightarrow 3^2 + z^2 - 2yz = 5^2 \end{cases}$$

Restando la tercera ecuación a la segunda:

$$-2xz + 2yz = 7^2 - 5^2 \Rightarrow 2z(y-x) = 7^2 - 5^2 \Rightarrow z = \frac{12}{y-x}$$

Luego tenemos el siguiente sistema equivalente:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 3^2 \\ z(z-x-y) = 28 \\ z = 12/(y-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 3^2 \\ \dfrac{12}{y-x}\left(\dfrac{12}{y-x} - x - y\right) = 28 \end{cases}$$

$$\frac{12}{y-x}-(x+y)=\frac{7(y-x)}{3}\Leftrightarrow\frac{12-(x+y)(y-x)}{y-x}=\frac{7(y-x)}{3}$$

$$\Leftrightarrow 12-(x+y)(y-x)=\frac{7(y-x)^2}{3}\Leftrightarrow 12-(y^2-x^2)=\frac{7(y-x)^2}{3}$$

$$\Leftrightarrow 12-(3^2-x^2-x^2)=\frac{7(y-x)^2}{3}\Leftrightarrow 3+2x^2=\frac{7(y-x)^2}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3+2x^2=\frac{7(y^2-2xy+x^2)}{3}\Leftrightarrow 3+2x^2=\frac{7(3^2-2xy)}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3+2x^2=\frac{63-14xy}{3}\Leftrightarrow 9+6x^2=63-14xy\Leftrightarrow 6x^2=54-14xy$$

$$\Leftrightarrow 3x^2=27-7xy\Leftrightarrow y=\frac{3x^2-27}{-7x}=\frac{27-3x^2}{7x}$$

Finalmente llegamos a la ecuación de cuarto grado:

$$x^2+\left(\frac{27-3x^2}{7x}\right)^2=3^2\Leftrightarrow x^2+\frac{(27-3x^2)^2}{49x^2}=3^2\Leftrightarrow\frac{49x^4+(27-3x^2)^2}{49x^2}=3^2$$

$$\Leftrightarrow 49x^4+(27-3x^2)^2=3^2\cdot 49x^2$$

$$\Leftrightarrow 49x^4+27^2-2\cdot 27\cdot 3x^2+9x^4=3^2\cdot 49x^2$$

$$\Leftrightarrow 58x^4+729-162x^2=441x^2$$

$$\Leftrightarrow 58x^4-603x^2+729=0$$

La resolvemos con sustitución $p=x^2$

$$58p^2-603p+729=0\Leftrightarrow p=\begin{cases}\frac{81}{58}\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{81}{58}}=\pm\frac{9}{\sqrt{58}}\\ 9\Rightarrow x=\pm\sqrt{9}=\pm 3\end{cases}$$

Sólo consideramos los resultados positivos:

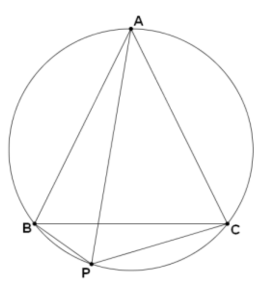
$x=\frac{9}{\sqrt{58}}\Rightarrow y=\frac{21}{\sqrt{58}},\ z=\sqrt{58}$

$x=3\Rightarrow y=0,\ z=-4$ resultado no aceptable.

Por lo tanto la solución es $\acute{A}rea=\left(\sqrt{58}\right)^2=58$

28.

a)



Aplicamos el Teorema de Ptolomeo al cuadrilátero ABPC:

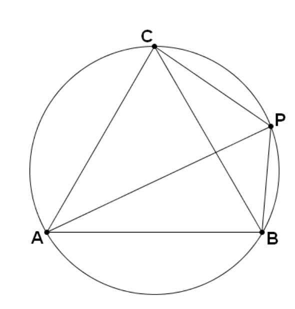
$AP \cdot BC = AB \cdot CP + BP \cdot AC$

Puesto que $AB = AC$, nos queda

$AP \cdot BC = AB \cdot CP + BP \cdot AC = AB \cdot CP + BP \cdot AB = AB(CP + BP) \Rightarrow$

$$\frac{AP}{CP + BP} = \frac{AB}{BC}$$

b)



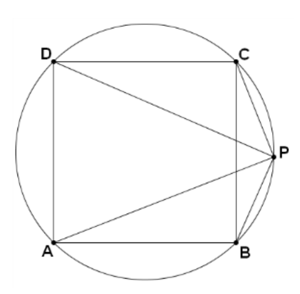
Aplicamos el Teorema de Ptolomeo al cuadrilátero $\lozenge ABPC$:

$$AP \cdot BC = AB \cdot CP + BP \cdot AC$$

Puesto que $AB = BC = AC$, podemos sacar factor común para llegar a la igualdad buscada:

$AP \cdot AB = AB \cdot CP + PB \cdot AB = AB(CP + PB) \Rightarrow AP = CP + PB$

c)



Por un lado, considerando el cuadrilátero cíclico APCD, tenemos

$PA \cdot CD + AD \cdot CP = PD \cdot AC$

Por otro lado, considerando el cuadrilátero cíclico ABPD, tenemos

$AD \cdot PB + AB \cdot PD = AP \cdot BD$

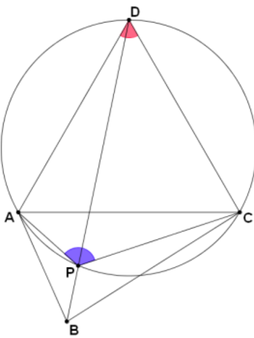
Puesto que $AB = BC = CD = DA$ y $AC = BD$,

$$PD \cdot AC = PA \cdot AB + AB \cdot CP = AB(PA + CP) \Rightarrow PD = \frac{AB(PA + CP)}{AC}$$

$$AP \cdot AC = AB \cdot PB + AB \cdot PD = AB(PB + PD) \Rightarrow AP = \frac{AB(PB + PD)}{AC}$$

Finalmente, $\frac{PD}{AP} = \frac{AB(PA + CP)/AC}{AB(PB + PD)/AC} = \frac{PA + CP}{PB + PD}$

d) Trazamos la circunferencia circunscrita al triángulo equilátero ΔACD. Sea P su punto de corte con $\overline{BD}$.



Aplicando el resultado del apartado b) tenemos que $PD = PA + PC$.
Luego $BD = PB + PD = PB + PA + PC$, por lo que el punto P es el punto buscado.
Un cuadrilátero cíclico tiene sus ángulos opuestos suplementarios, luego
$\angle APC = 180 - \angle ADC = 180 - 60 = 120^{\circ}$.

e)

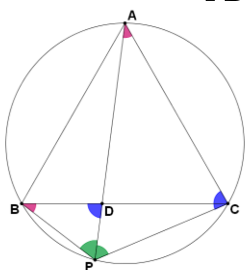
$$\frac{1}{PD} = \frac{1}{PB} + \frac{1}{PC} = \frac{PC + PB}{PB \cdot PC} \Leftrightarrow PD = \frac{PB \cdot PC}{PC + PB}$$

Por el apartado b) sabemos que $PA = PB + PC$, luego la igualdad anterior es equivalente a

$$PD = \frac{PB \cdot PC}{PA}$$

Es decir,

$$PD \cdot PA = PB \cdot PC \Leftrightarrow \frac{PD}{PB} = \frac{PC}{PA}$$



Esta última expresión es cierta pues los triángulos ΔBPD y ΔPCA son semejantes.
En efecto, $\angle DBP = PAC$ por ser un cuadrilátero cíclico, y $\angle BPA = \angle APC$ pues, si Q es el centro del triángulo circunscrito,

$$\angle BPA = \frac{1}{2}\angle BQA = \frac{1}{2}120 = \frac{1}{2}\angle AQC = \angle APC$$

29.

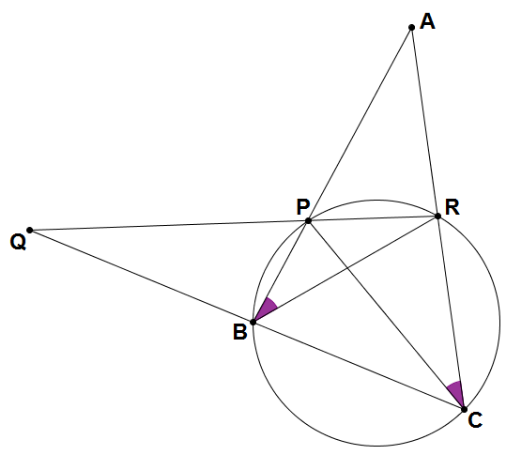
Aplicando el teorema de Menelao al triángulo ΔABC y la recta $\overleftrightarrow{PR}$, tenemos que

$$\frac{AR}{RC}\cdot\frac{CQ}{QB}\cdot\frac{BP}{PA}=-1$$

Luego

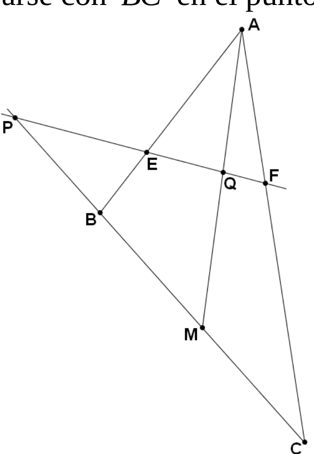
$$\frac{AR}{RC}\cdot\frac{CQ}{QB}\cdot\frac{BP}{PA}=-\frac{PA}{BP}\cdot\frac{RC}{AR}=\frac{RC}{PB}\cdot\frac{PA}{AR}$$

Así pues, sólo hay que demostrar que $\frac{PA}{AR}=\frac{AC}{AB}$, o equivalentemente $\frac{PA}{AC}=\frac{AR}{AB}$, lo cual es cierto pues los triángulos ΔABR y ΔACP son semejantes, pues $\angle ABR=\angle ACP$ por ser $\lozenge PRCB$ un cuadrilátero cíclico.



30.

El caso $AB = AC$ es trivial, luego podemos suponer que $AB \neq AC$ y por lo tanto EF no es paralela a BC.
Prolongamos EF hasta encontrarse con BC en el punto P.



Aplicamos Teorema de Menelao al triángulo ΔPCF con la transversal MQ:

$$\frac{PM}{MC} \cdot \frac{CA}{AF} \cdot \frac{FQ}{QP} = -1$$

Aplicamos Teorema de Menelao al triángulo ΔPEB con la transversal AM:

$$\frac{PQ}{QE} \cdot \frac{EA}{AB} \cdot \frac{BM}{MP} = -1$$

Multiplicamos las dos igualdades anteriores:

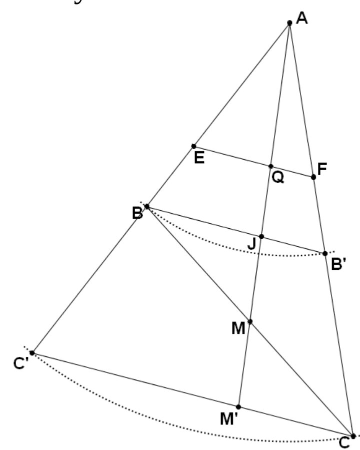
$$\frac{PM}{MC} \cdot \frac{CA}{AF} \cdot \frac{FQ}{QP} \cdot \frac{PQ}{QE} \cdot \frac{EA}{AB} \cdot \frac{BM}{MP} = (-1)(-1) = 1$$

Y simplificamos, teniendo en cuenta que $AF = -EA$ y $BM = -MC$

$$1 = \frac{CA}{QE} \cdot \frac{FQ}{AB} \Leftrightarrow \frac{CA}{AB} = \frac{QE}{FQ} \Leftrightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{QE}{QF}$$

Fuente de la solución: Challenging Problems in Geometry (Alfred S. Posamentier) Página 38.

Un método alternativo sin usar el Teorema de Menelao puede ser el siguiente:
Ya hemos visto que podemos suponer $AB \neq AC$, en particular $AB < AC$. Marcamos B' en AC de forma que $AB = AB'$ y marcamos C' en AB de forma que $AC = AC'$.



Tenemos así tres triángulos isósceles ΔAEF , $\Delta ABB'$ y $\Delta AC'C$ compartiendo el mismo ángulo $\angle EAF$, luego $\angle AEF = \angle ABB' = \angle AC'C$ y los triángulos ΔAEQ , ΔABJ y $\Delta AC'M'$ son semejantes.

Por lo tanto $\dfrac{AB}{BJ} = \dfrac{AC'}{C'M'} = \dfrac{AC}{C'M'} \Leftrightarrow \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BJ}{C'M'}$

$\angle JBM = \angle M'CM$ pues $BB' // C'C$ y por tanto ΔBJM y $\Delta CM'M$ son semejantes. Como además $BM = MC$, serán congruentes, y por tanto $BJ = CM'$. Así pues:

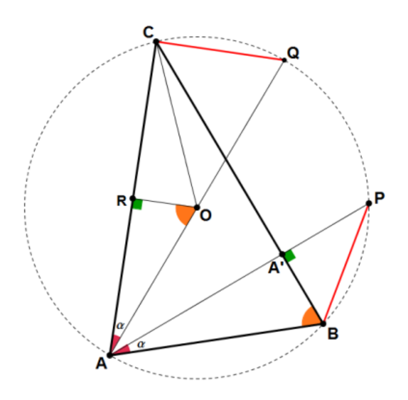
$$\frac{AB}{AC} = \frac{M'C}{C'M'}$$

La igualdad $\dfrac{M'C}{C'M'} = \dfrac{QF}{QE}$ es una consecuencia del paralelismo de EF y CC':

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{M'C}{AM'} = \dfrac{QF}{AQ} \Leftrightarrow \dfrac{M'C}{QF} = \dfrac{AM'}{AQ} \\ \dfrac{M'C'}{AM'} = \dfrac{QE}{AQ} \Leftrightarrow \dfrac{M'C'}{QE} = \dfrac{AM'}{AQ} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{M'C}{QF} = \frac{M'C'}{QE} \Rightarrow \frac{M'C}{M'C'} = \frac{QF}{QE}$$

31.

Sea R el punto medio del lado $\overline{AC}$. La recta OR es perpendicular a $\overline{AC}$ puesto que es la mediatriz de dicho lado (el circuncentro es el punto de corte de las mediatrices).



$\angle AOC = 2\angle ABC$ por el teorema del ángulo central.

$\angle ROA = \frac{1}{2}\angle AOC$ puesto que el triángulo ΔAOC es isósceles y por lo tanto la mediatriz $\overline{RO}$ es también bisectriz del ángulo $\angle AOC$.

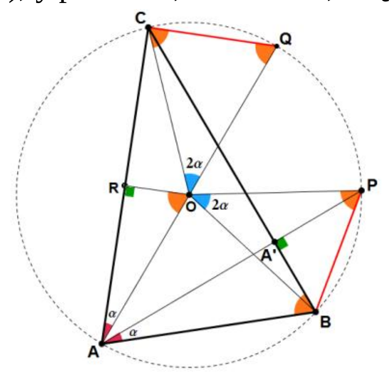
Por lo tanto $\angle ROA = \angle ABC$.

Luego por el criterio AA deducimos que los triángulos rectángulos ΔARO y $\Delta AA'B$ son semejantes, y por tanto $\alpha = \angle PAB = \angle A'AB = \angle RAO = \angle CAQ$.

$\angle ACQ = 90^{o}$ puesto que abarca el diámetro de la circunferencia, luego ΔACQ y ΔARO son semejantes, y por tanto $\angle AQC = \angle AOR$. Por otro lado $OC = OQ$, luego el triángulo ΔOCQ es isósceles y $\angle OCQ = \angle OQC$.

$\angle COQ = 2\alpha$ por el teorema del ángulo central.

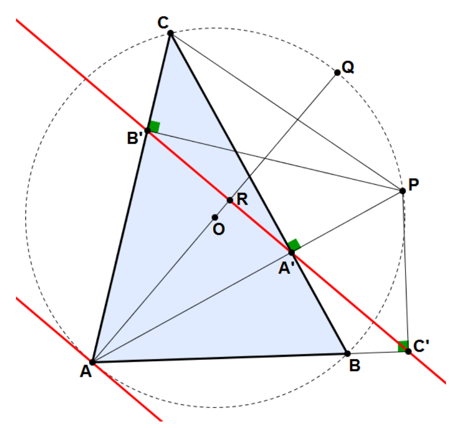
Y de la misma forma $\angle BOP = 2\alpha$, luego los triángulos ΔOCQ y ΔOPB son semejantes, de hecho son congruentes pues sus lados son radios de la circunferencia (Criterio SAS de congruencia), y por tanto, finalmente, $CQ = BP$.



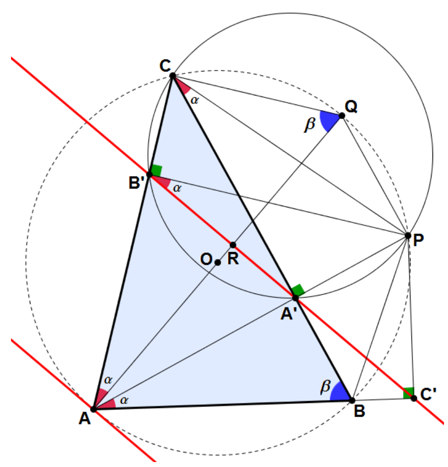
Sea O el centro de la circunferencia circunscrita. Sea R el punto de corte de AO con el lado BC y sea Q el otro punto de corte de AO con la circunferencia circunscrita.

32.

La recta perpendicular a la circunferencia por A se caracteriza por ser perpendicular al radio AO, luego tenemos que ver que la recta de Simson también es perpendicular al radio AO, es decir, a la recta AR.



En el ejercicio anterior hemos visto que $\angle ACQ = 90^o$ y $\alpha = \angle CAQ = \angle PAB$.
El cuadrilátero $\lozenge CB'A'P$ es cíclico pues el ángulo que determina una diagonal con un lado es igual al ángulo que determina otra diagonal con el lado contrario:
$\angle CB'P = \angle CA'P = 90^o$.



Luego $\angle A'B'P = \angle A'CP$. Pero por otro lado $\angle A'CP = \angle BCP = \alpha$ pues son ángulos que abarcan la misma cuerda PB.
Sea $\beta = \angle ABC$. Entonces $\angle CQA = \beta$ pues son ángulos que abarcan la misma cuerda AC.
El triángulo ΔACQ es rectángulo en C, pues el ángulo en C abarca un diámetro de la circunferencia circunscrita, luego $\alpha + \beta + 90 = 180$.
Pero entonces, en el cuadrilátero $\lozenge CB'RQ$ tenemos ángulos opuestos en B' y Q suplementarios: $90 + \alpha + \beta = 180$, y por tanto es cíclico, luego sus dos vértices opuestos C y R también tienen ángulos suplementarios. Pero $\angle B'CQ = 90$, luego $\angle B'RQ = 90^o$, y la recta de Simplón es perpendicular a un radio de la circunferencia.

33.

a)

Sea $a = AE \Rightarrow CE = 7 - a$.

Aplicamos el mismo teorema a la bisectriz BE:

$$\frac{a}{7-a} = \frac{5}{3} \Rightarrow 3a = 5(7-a) \Rightarrow a = \frac{35}{8}$$

Ahora aplicamos el Teorema de la bisectriz al triángulo ΔABE y su bisectriz AP:

$$\frac{x}{y} = \frac{AB}{AE} = \frac{5}{(35/8)} = \frac{8}{7}$$

b)

Aplicamos la Proposición 10.3.8(b):

$$\left.\begin{array}{l} AF = \frac{2\cdot 1\cdot 2}{3}\cos(A/2) \\ AT = \frac{2\cdot 4\cdot 6}{10}\cos(A/2) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AF}{AT} = \frac{2\cdot 1\cdot 2/3\cos(A/2)}{2\cdot 4\cdot 6/10\cos(A/2)} = \frac{2/3}{4\cdot 6/10} = \frac{5}{18}$$

34.

a)
Por 10.3.5 el área del triángulo será

$$[\Delta ABC] = r \cdot \frac{a+b+c}{2}$$

Por ser un triángulo rectángulo tenemos que

$$[\Delta ABC] = \frac{a\,b}{2}$$

Luego

$$\frac{a\,b}{2} = r \cdot \frac{a+b+c}{2} \Leftrightarrow a\,b = r\,(a+b+c) \Leftrightarrow r = \frac{a\,b}{a+b+c}$$

Aplicamos Pitágoras y racionalizamos la fracción:

$$c = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$r = \frac{a\,b}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a\,b\left(a+b-\sqrt{a^2+b^2}\right)}{\left(a+b+\sqrt{a^2+b^2}\right)\left(a+b-\sqrt{a^2+b^2}\right)} =$$

$$= \frac{a\,b(a+b-c)}{(a+b)^2-\left(a^2+b^2\right)} = \frac{a\,b(a+b-c)}{a^2+b^2+2ab-a^2-b^2} = \frac{a\,b(a+b-c)}{2ab} =$$

$$= \frac{a+b-c}{2}$$

b)
Por el apartado anterior, todo se reduce a demostrar que si a, b y c son enteros, $a+b-c$ es par.

Utilizaremos para ello los siguientes hechos:

Un número es par si y sólo si lo es su cuadrado.
La suma o resta de dos pares es par.
La suma o resta de dos impares es par.
La suma o resta de un par y de un impar es impar.

Si a y b son pares, entonces a^2 y b^2 son pares, $c^2 = a^2+b^2$ es par, y por tanto c es par, luego $a+b-c$ es par.
Si a y b son impares, entonces a^2 y b^2 son impares, $c^2 = a^2+b^2$ es par, y por tanto c es par, luego $a+b-c$ es un par menos un par y por tanto par.
Si a es par y b es impar, entonces a^2 es par y b^2 es impar, $c^2 = a^2+b^2$ es impar, y por tanto c es impar, luego $a+b-c$ es un impar menos un impar y por tanto par.
El caso a impar y b par se demuestra de forma similar.

Independientemente del caso, el resultado es un número par.

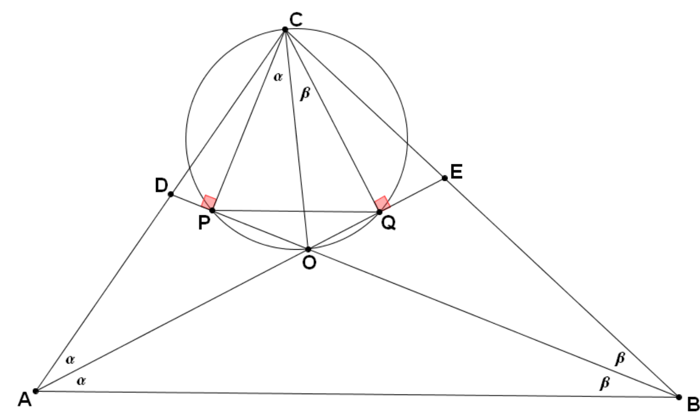
35.

Primera solución:

Sea O la intersección de AE y BD, que es el incentro del triángulo.
Sea $\alpha = \angle CAE$, $\beta = \angle CBD$ y $\delta = \angle ACO$.
Claramente $2\alpha + 2\beta + 2\delta = 180 \Rightarrow \alpha + \beta + \delta = 90$.

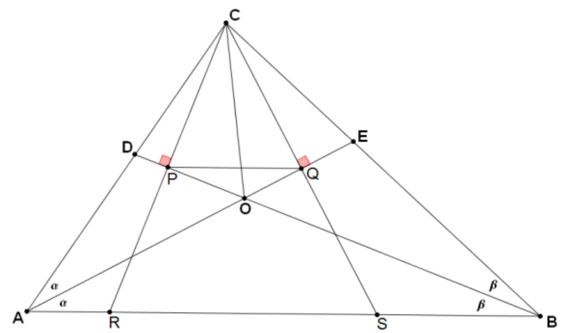
En el triángulo ΔAOC :
$\angle AOC + \alpha + \delta = 180 \Rightarrow \angle AOC + (90 - \beta) = 180 \Rightarrow \angle AOC = 90 + \beta$
Y de la misma manera tenemos $\angle BOC = 90 + \alpha$.
En el triángulo ΔBCD :
$\angle CDB + 2\delta + \beta = 180 \Rightarrow \angle CDB = 180 - (\delta + \beta) - \delta = 180 - (90 - \alpha) - \delta =$
$= 180 - 90 + \alpha - \delta = 90 + \alpha - \delta =$
Luego
$\angle DCP = 90 - \angle CDP = 90 - (90 + \alpha - \delta) = \delta - \alpha$
Y por tanto $\angle PCO = \delta - (\delta - \alpha) = \alpha$
De la misma manera llegamos a $\angle QCO = \beta$, y por tanto $\angle PCQ = \alpha + \beta$

Claramente $\angle COP = 90 - \alpha$, y puesto que $\angle AOC = 90 + \beta$,
$\angle AOD = \angle AOC - \angle COP = 90 + \beta - (90 - \alpha) = \alpha + \beta$
Y por tanto $\angle POQ = 180 - (\alpha + \beta)$.
Así pues, el cuadrilátero $\lozenge CPOQ$ es cíclico puesto que tiene dos ángulos opuestos suplementarios.



PQ es una de sus diagonales, y se cumplirá
$\angle PQO = \angle PCO = \alpha$, y por el teorema de los ángulos internos alternos congruentes, $AB // PQ$.

Segunda solución:
Prolongamos los segmentos CP y CQ hasta encontrar el lado AB en los puntos R y S respectivamente.



Los triángulos rectángulos ΔCPB y ΔRPB son semejantes pues comparten un mismo ángulo β, y son congruentes porque comparten un mismo cateto $\overline{PB}$, luego $\overline{CP} \cong \overline{PR}$, es decir, P es el punto medio del segmento $\overline{CR}$.

De la misma forma se demuestra que Q es el punto medio del segmento $\overline{CS}$.

Ahora aplicamos el Teorema del conector de puntos medios (6.2.1) para concluir que $PQ // AB$.

Fuente de esta solución: Challenging Problems in Geometry (Alfred S. Posamentier) Página 55.

36.

a)

Sea $\alpha = \angle DAB$.

Aplicamos el Teorema del Coseno (8.1.4) al triángulo ΔADC:

$$AC^2 = 5^2 + 6^2 - 2\cdot 5\cdot 6\cdot Cos(\alpha) \Leftrightarrow$$
$$AC^2 = 61 - 60\cdot Cos(\alpha)$$

Aplicamos el mismo teorema al triángulo ΔABC:

$$AC^2 = 5^2 + 4^2 - 2\cdot 5\cdot 4\cdot Cos(\angle ABC) \Leftrightarrow$$
$$AC^2 = 41 - 40\cdot Cos(\alpha)$$

Pero por ser un cuadrilátero cíclico sus ángulos opuestos son suplementarios:

$$\angle ADC + \angle ABC = 180$$

Luego los cosenos son los mismos pero de signo contrario:

$$Cos(\alpha) = -Cos(ABC)$$

Y por tanto nos queda el sistema:

$$\left.\begin{aligned} AC^2 &= 61 - 60\cdot Cos(\alpha) \\ AC^2 &= 41 + 40\cdot Cos(\alpha) \end{aligned}\right\}$$

Multiplicando la primera por 2 y la segunda por 3

$$\left.\begin{aligned} 2AC^2 &= 122 - 120\cdot Cos(\alpha) \\ 3AC^2 &= 123 + 120\cdot Cos(\alpha) \end{aligned}\right\}$$

Sumando las dos ecuaciones:

$$5AC^2 = 245 \Rightarrow AC^2 = \frac{245}{5} = 49 \Rightarrow AC = \pm\sqrt{49} = \pm 7$$

La única solución válida es, naturalmente, la positiva, $AC = 7$.

De la misma forma, o mediante el Teorema de Ptolomeo, se llega a $BD = \frac{50}{7}$.

b) $\Delta ADE \approx \Delta BCE \Rightarrow \frac{BE}{45} = \frac{56}{60} \Rightarrow BE = \frac{56\cdot 45}{60} = 42$

$\Delta ABE \approx \Delta DCE \Rightarrow$ Existe un x tal que $DE = 45x$, $CE = 42x$, $CD = 39x$.

Aplicando ahora el Teorema de Ptolomeo (9.5.9):

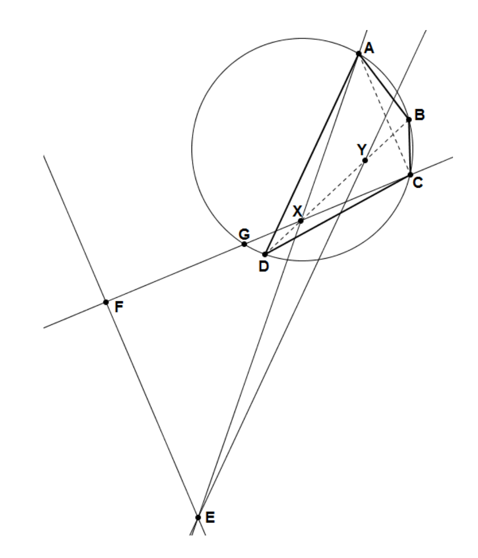
$$39\cdot 39x = (45 + 42x)(42 + 45x)$$

cuya única solución es $x = \frac{7}{15}$, luego $CD = 39\cdot\frac{7}{15} = \frac{91}{5} = 18.2$

37.

Primera versión:

Vamos a ir calculando los segmentos implicados en el problema, con paciencia, uno a uno:



Calculamos DB mediante el Teorema del Coseno (ver el problema anterior #36):

$$\begin{cases} DB^2 = 3^2 + 8^2 - 2\cdot 3\cdot 8\cdot Cos(\angle DAB) \\ DB^2 = 6^2 + 2^2 - 2\cdot 6\cdot 2\cdot Cos(\angle DCA) \end{cases}$$

$Cos(\angle DACB) = Cos(\angle DCA)$ por ser un cuadrilátero cíclico.

Resolvemos el sistema:

$$DB = \sqrt{51},\ Cos(\angle DAB) = \frac{11}{24}$$

Calculamos AC mediante el Teorema de Ptolomeo (9.5.9):

$$AC \cdot BD = 8\cdot 2 + 3\cdot 6 \Rightarrow AC = 2\sqrt{\frac{17}{3}}$$

Por lo tanto

$$\frac{DX}{BD} = \frac{1}{4} \Rightarrow DX = \frac{1}{4}BD = \frac{\sqrt{51}}{4}$$

$$\frac{BY}{BD} = \frac{11}{36} \Rightarrow BY = \frac{11}{36}BD = \frac{11\sqrt{51}}{36}$$

Mediante el Teorema de Stewart (8.1.6) aplicado al triángulo ΔDBC determinamos CX:

$$\left.\begin{array}{l} a = BD = \sqrt{51} \\ m = DX = \sqrt{51}/4 \\ n = BX = 3\sqrt{51}/4 \\ b = BC = 2 \\ c = CD = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow d^2 = \frac{b^2m + c^2n - mna}{a} \Rightarrow XC = d = \frac{\sqrt{295}}{4}$$

Mediante el mismo teorema, aplicado al triángulo ΔDBA determinamos AX:

$$\left.\begin{array}{l} a = BD = \sqrt{51} \\ m = DX = \sqrt{51}/4 \\ n = BX = 3\sqrt{51}/4 \\ b = AB = 3 \\ c = AD = 8 \end{array}\right\} \Rightarrow d^2 = \frac{b^2 m + c^2 n - mna}{a} \Rightarrow AX = d = \frac{\sqrt{631}}{4}$$

Mediante triángulos semejantes calculamos GX:

$$\Delta GXD \approx \Delta CXB \Rightarrow \frac{CB}{GD} = \frac{CX}{XD} \Rightarrow \frac{2}{GD} = \frac{\sqrt{295}/4}{3\sqrt{51}/4} \Rightarrow GD = 2\sqrt{\frac{51}{295}}$$

$$\frac{GX}{XB} = \frac{DX}{CX} \Rightarrow GX = \frac{\sqrt{51}}{\sqrt{295}} \cdot 3\sqrt{51}/4 = \frac{153}{4\sqrt{295}}$$

Mediante triángulos semejantes calculamos EX:

$$\Delta DXA \approx \Delta YXE \Rightarrow \frac{EX}{XA} = \frac{DX}{XY} \Rightarrow \frac{EX}{\sqrt{631}/4} = \frac{4\sqrt{51}/9}{\sqrt{51}/4} \Rightarrow EX = \frac{4\sqrt{631}}{9}$$

Mediante triángulos semejantes calculamos FX:

$$\Delta XFE \approx \Delta XCA \Rightarrow \frac{FX}{XC} = \frac{XE}{XA} \Rightarrow \frac{FX}{\sqrt{295}/4} = \frac{4\sqrt{631}/9}{\sqrt{631}/4} \Rightarrow FX = \frac{4\sqrt{295}}{9}$$

Finalmente calculamos el producto pedido:

$$XF \cdot XG = \frac{4\sqrt{295}}{9} \cdot \frac{153}{4\sqrt{295}} = \frac{153}{9} = 17$$

Segunda versión:
Mediante el Teorema de la Potencia de un punto interior (9.1.5) tenemos

$$XG \cdot XC = XD \cdot XB$$

También lo podemos ver por semejanza: $\Delta XDG \approx \Delta XBC$, y por tanto

$$\frac{XD}{XG} = \frac{XC}{XB}$$

En todo caso:

$$XG \cdot XC = XD \cdot XB \Rightarrow XG = \frac{XD \cdot XB}{XC} = \frac{(1/4)DB \cdot (3/4)DB}{XC} = \frac{3}{16}\frac{DB^2}{XC}$$

Luego

$$XG \cdot XF = \frac{3}{16} DB^2 \frac{XF}{XC} \quad (*)$$

Por otro lado,

$AC \,//\, EF \Rightarrow \Delta XFE \approx \Delta XCA \Rightarrow \dfrac{XF}{XC} = \dfrac{XE}{AX}$

Y también

$EY \,//\, AD \Rightarrow \Delta EYX \approx \Delta ADX \Rightarrow \dfrac{XE}{AX} = \dfrac{XY}{XD}$

Por otro lado:

$XY = BD - DX - YB = BD - \dfrac{1}{4}BD - \dfrac{11}{36}BD = \dfrac{4}{9}BD$

Luego $\dfrac{XY}{XD} = \dfrac{(4/9)BD}{(1/4)BD} = \dfrac{16}{9}$

Recuperando (*) llegamos a:

$XG \cdot XF = \dfrac{3}{16}DB^2 \dfrac{XF}{XC} = \dfrac{3}{16}DB^2 \dfrac{16}{9} = \dfrac{1}{3}DB^2$

Y el valor de DB^2 lo obtenemos mediante el Teorema del Coseno, como en la primera versión de la solución de este problema:

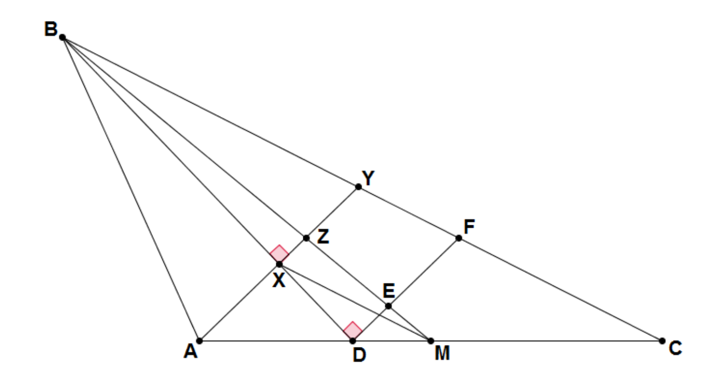
$DB^2 = 51 \Rightarrow XG \cdot XF = \dfrac{51}{3} = 17$.

Fuente de esta versión: https://youtu.be/JdERP0d0W64

38.

Primera versión.

Trazamos la perpendicular a BD por A, y sea Y su punto de corte con BC, Z su punto de corte con BM y X su punto de corte con BD.



Los triángulos ΔABX y ΔYBX son congruentes pues son rectángulos, $\angle ABX \cong \angle XBY$ y comparten el cateto $\overline{BX}$. Luego $AX = XY$ y $BY = AB = 360$, y por tanto $CY = BC - BY = 507 - 360 = 147$.

Puesto que también se cumple $AM = MC$, por el Teorema del conector de puntos medios de un triángulo (6.2.1) tenemos que $XM // YC$ y $XM = \frac{1}{2}CY = \frac{147}{2}$.

Puesto que $XM // BY$ se cumple $\Delta BZY \approx \Delta MZX$.

Finalmente,

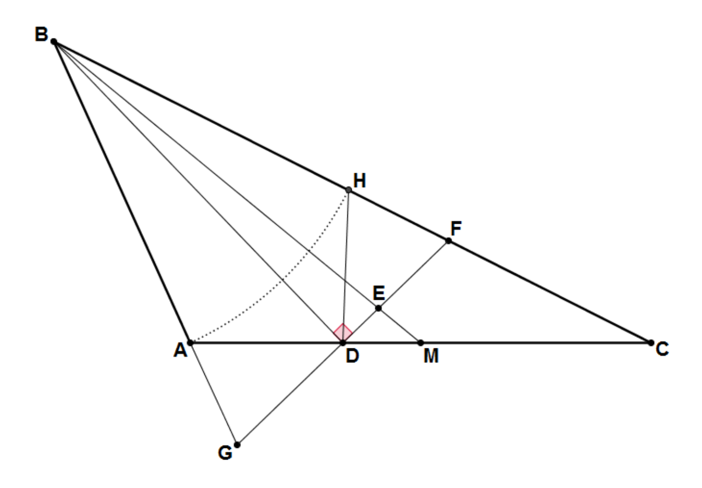
$$\frac{DE}{EF} = \frac{XZ}{ZY} = \frac{XM}{BY} = \frac{147/2}{360} = \frac{49}{240}$$

Y por tanto la solución es $49 + 240 = 289$.

Fuente: "**djmathman**" en https://artofproblemsolving.com/community/c4h87317p509442

Segunda versión.

Prolongamos el segmento DF hasta encontrarse con la recta AB en el punto G. Los triángulos rectángulos ΔBDG y ΔBDF son claramente congruentes, pues comparten un ángulo y un cateto, luego $BG = BF$ y $\angle BGD = \angle DFB$.
Marcamos el punto H del segmento $\overline{BF}$ tal que $\overline{BH} = \overline{AB}$.



Claramente $\Delta ABD \cong \Delta HBD$ por el criterio SAS, luego $\overline{AD} \cong \overline{DH}$.
Además, $\Delta ADG \cong \Delta HDF$ por el criterio SSS, y por tanto $\angle ADG \cong \angle HDF$.
Por otro lado, claramente $\angle ADG \cong \angle FDC$ por ser ángulos opuestos por el vértice, de lo que deducimos que DF es la bisectriz del ángulo $\angle HDC$.

Sean $a = BC$, $b = AC$ y $c = AB$.
Por 10.3.7 tenemos que

$$AD = \frac{bc}{a+c} = DH \quad \text{y} \quad CD = \frac{ab}{a+c}$$

Por ser DF la bisectriz de $\angle HDC$ tenemos que

$$HF = \frac{HC \cdot DH}{DH + DC} = \frac{(a-c) \cdot DA}{b} = \frac{(a-c)}{b} \frac{bc}{(a+c)} = \frac{c(a-c)}{a+c}$$

$$FC = \frac{HC \cdot DC}{DH + DC} = \frac{(a-c) \cdot DC}{b} = \frac{(a-c)}{b} \frac{ab}{a+c} = \frac{a(a-c)}{a+c}$$

donde hemos tenido en cuenta que $DH + DC = DA + DC = AC = b$.

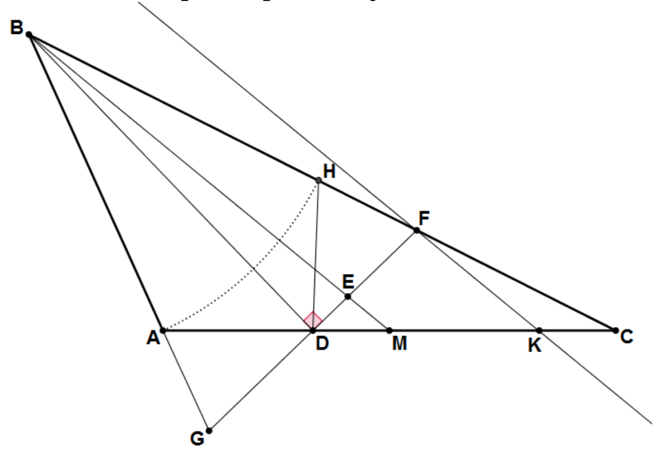
Luego

$$BF = BH + HF = BA + HF = c + \frac{c(a-c)}{a+c} = \frac{c(a+c) + c(a-c)}{a+c} = \frac{2ac}{a+c}$$

Y por tanto

$$\frac{BF}{FC} = \frac{2ac/(a+c)}{a(a-c)/(a+c)} = \frac{2c}{a-c}$$

Trazamos la recta paralela a BM por el punto F y sea K su intersección con AC:



$\Delta CFK \cong \Delta CBM$, luego tenemos

$$\frac{MK}{CM}=\frac{BF}{BC}\Rightarrow MK=\frac{BF\cdot CM}{BC}=\frac{2ac/(a+c)\cdot b/2}{a}=\frac{bc}{a+c}$$

Por otro lado (*):

$$DM=CD-CM=\frac{ab}{a+c}-\frac{b}{2}=\frac{2ab-b(a+c)}{2(a+c)}=\frac{b(a-c)}{2(a+c)}$$

Claramente $\Delta DEM \cong DFK$, luego, finalmente:

$$\frac{DE}{EF}=\frac{DM}{MK}=\frac{b(a-c)/(2(a+c))}{bc/(a+c)}=\frac{a-c}{2c}$$

Curiosamente esta razón no depende de la longitud de AC.

En nuestro caso concreto:

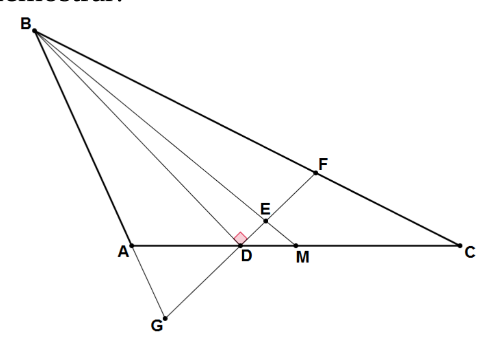
$$\frac{DE}{EF}=\frac{a-c}{2c}=\frac{507-360}{2\cdot 360}=\frac{49}{240}$$

y por tanto la solución es $49+240=289$.

(*) Aquí hago algunas correcciones menores que encuentro en la página web, por lo que algunos de los pasos anteriores tal vez ya no sean necesarios.

Fuente: “**TachyonPulse**” en https://artofproblemsolving.com/community/c4h87317p509442

Tercera versión.
Sea G el punto de corte entre DF y AB. Ya hemos visto anteriormente que $GD = DF$, no hace falta volverlo a demostrar.



Claramente $(A,C,M,D)\overset{D}{\underset{\wedge}{=}}(G,F,E,D)$, luego por 11.2.3 se cumplirá

$$(A,C;M,D) = (G,F;E,D)$$

Es decir: $$\frac{AM \cdot CD}{AD \cdot CM} = \frac{GE \cdot FD}{GD \cdot EF}$$

Por ser M el punto medio de AC se cumple $\frac{AM}{CM} = 1$, y por ser D el punto medio de GF se cumple $\frac{FD}{GD} = 1$, con lo que la igualdad anterior se reduce a $\frac{CD}{AD} = \frac{GE}{EF}$.

Por el Teorema de la Bisectriz interior (10.3.1) sabemos que $\frac{CD}{AD} = \frac{a}{c}$

Luego $\frac{GE}{EF} = \frac{a}{c}$

Por otro lado,

$$GE = GD + DE = DF + DE = DE + EF + DE = 2DE + EF \Rightarrow$$

$$DE = \frac{GE - EF}{2}$$

Y por tanto $\frac{DE}{EF} = \frac{GE - EF}{2EF} = \frac{GE/EF - 1}{2} = \frac{a/c - 1}{2} = \frac{a-c}{2c}$.

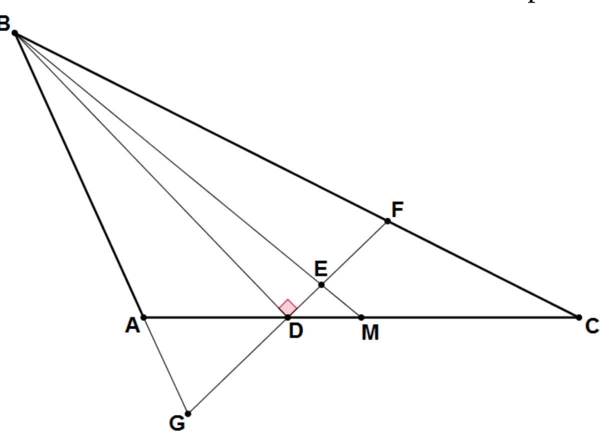
Curiosamente esta razón no depende de la longitud de AC.

En nuestro caso, $\frac{DE}{EF} = \frac{a-c}{2c} = \frac{507 - 360}{2 \cdot 360} = \frac{49}{240}$, y por tanto la solución es $49 + 240 = 289$.

Fuente: https://ckrao.wordpress.com/2013/07/25/solving-a-tricky-geometry-problem-using-cross-ratios/

Cuarta versión.

Nuevamente prolongamos DF hasta encontrarse con AB en el punto G.



Puesto que M es el punto medio de AC, tenemos $[\Delta AMB]=[\Delta MBC]$, pues son triángulos con la misma base y la misma altura, por lo tanto, por 8.2.1 tenemos

$$\frac{AB\cdot BM\cdot \sin\angle ABM}{2}=\frac{BM\cdot CB\cdot \sin\angle MBC}{2}\Rightarrow AB\cdot \sin\angle ABM=CB\cdot \sin\angle MBC\Rightarrow$$
$$\frac{AB}{CB}=\frac{\sin\angle MBC}{\sin\angle ABM}$$

Puesto que $GB=BF$ (ver versiones anteriores), por el teorema del seno:

$$\frac{GE}{\sin\angle ABM}=\frac{BE}{\sin\angle BGE}=\frac{GB}{\sin\angle GEB}=\frac{BF}{\sin\angle FEB}=\frac{EF}{\sin\angle MBC}\Rightarrow$$
$$\frac{GE}{\sin\angle ABM}=\frac{EF}{\sin\angle MBC}\Rightarrow\frac{\sin\angle MBC}{\sin\angle ABM}=\frac{EF}{GE}$$

Luego $\frac{AB}{CB}=\frac{EF}{GE}\Rightarrow\frac{GE}{EF}=\frac{CB}{AB}=\frac{a}{c}$

Por último, de $GE=EF+2DE$ (ver la tercera versión) deducimos

$$\frac{a}{c}=\frac{GE}{EF}=\frac{EF+2DE}{EF}=1+2\frac{DE}{EF}\Rightarrow 2\frac{DE}{EF}=\frac{a}{c}-1=\frac{a-c}{c}\Rightarrow\frac{DE}{EF}=\frac{a-c}{2c}$$

Fuente: “**Snail Erato**” en Google+.

Otras tres versiones, utilizando coordenadas baricéntricas, identidades trigonométricas y otras técnicas:

https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php?title=2003_AIME_I_Problems/Problem_15

Otra versión mediante vectores:

https://ckrao.wordpress.com/2013/07/25/solving-a-tricky-geometry-problem-using-cross-ratios/

39.

Sea $E = AB \cap CD$ y $F = AD \cap BC$.

Tenemos cuatro perspectividades:

$p_D : \overleftrightarrow{AB} \to \overleftrightarrow{BC}$, $B \to B$, $M_1 \to M_2$, $M_5 \to M_6$, $M_9 \to M_{10}$, $A \to F$, $C \to E$.

$p_A : \overleftrightarrow{BC} \to \overleftrightarrow{CD}$, $B \to E$, $M_2 \to M_3$, $M_6 \to M_7$, $M_{10} \to M_{11}$, $C \to C$, $F \to D$.

$p_B : \overleftrightarrow{CD} \to \overleftrightarrow{DA}$, $E \to A$, $M_3 \to M_4$, $M_7 \to M_8$, $M_{11} \to M_{12}$, $D \to D$, $F \to C$.

$p_C : \overleftrightarrow{DA} \to \overleftrightarrow{AB}$, $A \to A$, $M_4 \to M_5$, $M_8 \to M_9$, $M_{12} \to M_{13}$, $F \to B$, $D \to E$.

La combinación de estas cuatro genera una proyectividad de $\overleftrightarrow{AB}$ en sí misma tal que

$$(A, E; B; M_1) \overline{\wedge} (E, B, A, M_5)$$

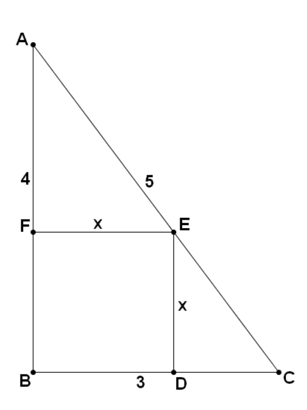
y volviendo a aplicar esta misma proyectividad tenemos:

$$(A, E; B; M_1) \overline{\wedge} (E, B, A, M_5) \overline{\wedge} (A, E, B, M_{13})$$

Luego por 11.1.3 deducimos $M_1 = M_{13}$.

40.

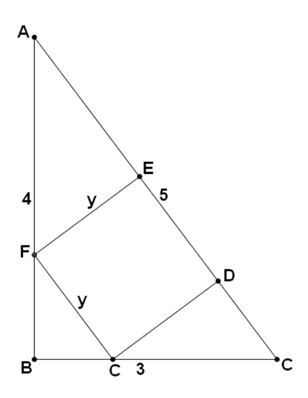
En ambos casos se soluciona mediante triángulos semejantes. En el primer caso, si el cuadrado tiene vértices B, D, E y F:



Claramente $\Delta ABC \cong \Delta AFE$, luego $\frac{x}{AF} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{x}{4-x} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 4x = 3(4-x)$

Ecuación cuya solución es $x = \frac{12}{7}$.

En el segundo caso, si nuevamente son B, D, E y F los vértices del cuadrado:



Por el criterio AA de semejanza, $\Delta ABC \cong \Delta AEF \Rightarrow \frac{AF}{5} = \frac{y}{3} \Leftrightarrow AF = \frac{5y}{3}$

Puesto que $FC // AC$, $\Delta ABC \cong \Delta FBC \Rightarrow \frac{BF}{4} = \frac{y}{5} \Leftrightarrow BF = \frac{4y}{5}$

Luego $4 = AF + BF = \frac{5y}{3} + \frac{4y}{5} = \frac{37y}{15} \Rightarrow y = \frac{15 \cdot 4}{37} = \frac{60}{37}$

Finalmente, $\frac{x}{y} = \frac{12/7}{60/37} = \frac{37}{35}$

Apéndice: American Mathematics Competitions.

1. Visión general.

Las **American Mathematics Competitions** (AMC) son una serie de pruebas matemáticas de dificultad creciente para estudiantes americanos de secundaria ("middle school") y bachillerato ("high school").

Las AMC constan de las siguientes pruebas, en orden creciente de dificultad:

- **AMC 8** (American Math Contest 8), para estudiantes hasta "grade 8" (13-14 años).

- **AMC 10** (American Math Contest 10), para estudiantes hasta "grade 10" (15-16 años).

- **AMC 12** (American Math Contest 12), para estudiantes hasta "grade 12" (17-18 años).

- **AIME** (American Invitational Mathematics Examination), para los mejor clasificados de las AMC 10 y 12.

- **USAMO** (United States of America Mathematics Olympiad), para los mejor clasificados en las AIME y AMC.

Finalmente, los mejor clasificados de las USAMO son invitados a participar en la MOSP (**Mathematical Olympiad Summer Program)**, de donde saldrán escogidos los seis integrantes del equipo que representará a Los Estados Unidos en las **International Mathematical Olympiad (IMO)**.

2. AMC.

La AMC 10 y AMC 12 son la primera prueba de las **American Mathematics Competitions.**

La prueba AMC 12 se realiza en febrero, y se presentan dos versiones diferentes en dos semanas distintas. Están invitados a participar todos los estudiantes americanos y canadienses del curso escolar "**grade 12**", es decir, alrededor de 17 o 18 años de edad. Para participar en las AMC 12 es necesario tener menos de 19.5 años en el día de la prueba.

Tanto la AMC 10 como la AMC 12 constan de 25 problemas, de dificultad creciente, para resolver en 75 minutos. Es "tipo-test", con 5 posibles respuestas. Desde el 2008 no está permitido el uso de calculadoras. Cada pregunta acertada puntúa 6 puntos, y las preguntas incorrectas puntúan 0.

Con el objetivo de penalizar a los estudiantes que respondan al azar los problemas, se puntúan positivamente los problemas sin responder con 1.5 puntos. Antes del 2002 la puntuación por cada ejercicio sin responder era de 2 puntos, y entre el 2002 y el 2006 era de 2.5 puntos.

Los estudiantes que obtienen más de 100 puntos o están situados dentro del 5% superior de los clasificados en la AMC 12 son invitados a participar en la siguiente fase, la **American Invitational Mathematics Examination** (AIME). También acceden a la AIME el 2.5% de los mejores clasificados de la AMC 10.

El currículum matemático de las AMC 12 abarca un gran número de campos: Aritmética, álgebra, combinatoria y recuento, geometría, teoría de números, probabilidad y precálculo, pero se excluye el cálculo diferencial. El currículum de las AMC 10 no incluye trigonometría, precálculo o cálculo diferencial.

Tanto las AMC 10 como la AMC 12 tienen versiones A y B. Ambas tienen la misma dificultad y estructura, pero se realizan en dos días distintos. Las versiones A y B tienen entre 10 y 15 preguntas en común. Por ejemplo, en la edición del 2016, las pruebas AMC 12A y AMC 12B tuvieron 14 preguntas en común, mientras que las pruebas AMC 10A y AMC 10B tuvieron 12 preguntas en común.

3. AIME.

AIME (American Invitational Mathematics Examination) es la segunda prueba dentro de la serie de competiciones matemáticas para seleccionar los integrantes del equipo que representará a los Estados Unidos en las Olimpiadas Matemáticas Internacionales (IMO).

Los mejor clasificados en la AIME son invitados a participar en las United States of America Mathematics Olympiad (USAMO), si provienen de las AMC 12, o en las United States of America Junior Mathematics Olympiad (USAJMO), si provienen de las AMC 10.

La **AIME I 2016** se celebró el 3 de marzo del 2016, participando 2855 estudiantes de USA y Canadá.

A la AIME llegan los estudiantes que están dentro del 5% superior de la AMC 12 y los estudiantes que alcanzan el 2.5% superior en las AMC 10.

Formato.
La prueba AIME consta de 15 problemas para resolver en 3 horas. Cada problema tiene como solución un número entero entre 0 y 999, con lo que, a diferencia de las pruebas AMC, no tiene ningún sentido la estrategia de responder al azar.
Las preguntas acertadas reciben un punto y las incorrectas o no respondidas 0 puntos.
Los problemas van aumentando en dificultad: Los primeros tienen un nivel de dificultad semejante al de la prueba AMC, mientras que los últimos son mucho más difíciles.
Las calculadoras no están permitidas.

Curriculum.
Los problemas planteados abarcan aritmética, álgebra, técnicas de recuento, geometría, teoría de números y probabilidad, entre otros temas.

4. MOSP.

La **MOSP** (Mathematical Olympiad Summer Program) es un programa de preparación intensiva de cuatro semanas para los mejores 50 clasificados de las **USAMO** (United States of America Mathematics Olympiad).

Las MOSP consisten en jornadas intensas de preparación en las áreas más importantes de matemáticas y en la resolución de problemas, incluyendo combinatoria, funciones, teoría de grafos, recursividad, sumas y productos, probabilidad, teoría de números, polinomios, ecuaciones funcionales, números complejos aplicados a la geometría, demostraciones algorítmicas, geometría combinatoria y inecuaciones tradicionales.

En las MOSP los participantes se dividen en tres grupos, cada uno con un color identificativo, en función de las puntuaciones obtenidas. Entre los doce integrantes del mejor grupo (con color negro) se seleccionarán los seis para el equipo USA de las Olimpiadas Matemáticas Internacionales.

El estilo de los problemas de las Olimpiadas consiste en problemas variados cuyas soluciones requieren un profundo análisis y unos argumentos muy cuidadosos. Estos problemas pueden parecer impenetrables para los neófitos aunque casi siempre se pueden resolver con las técnicas matemáticas del bachillerato, eso sí, manejadas de forma muy inteligente.

Fuentes:
https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php?title=American_Invitational_Mathematics_Examination
https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php?title=American_Mathematics_Competitions
https://ivyleaguecenter.wordpress.com/2016/01/21/amc-12/

Siglas.

APMO Asian-Pacific Mathematical Olympiad. Started in 1989, the APMO is a regional competition for countries in the Asian Pacific region, as well as the United States and some other countries. The test consists of a single four-hour day with five problems.

ARML American Regional Mathematics League.

BAMO Bay Area Mathematical Olympiad. The contest is taken by several hundred students in the Bay Area annually. The format is identical to that of the APMO.

Canada Canadian Mathematical Olympiad, abbreviated CMO.

CGMO The China Girls Mathematical Olympiad. The contest began in 2002, and consists of two days, each with four problems to be solved in four hours.

EGMO The European Girls' Mathematical Olympiad, a new contest inspired by the CGMO. The first EGMO was held in Cambridge in April 2012. Currently, the contest format matches the IMO. Countries send teams of up to four female students to compete at each event.

ELMO The ELMO is a contest held at MOP every year, produced by returning MOPpers and taken by first-time MOPpers. In particular, all problems are created, compiled, and selected by students. The meaning of the acronym changes each year, originally standing for "Experimental LincolnMathOlympiad" but soon taking such names as "Exceeding Luck-BasedMath Olympiad", "Ex-experimental Math Olympiad", "$e_{\log}$ Math Olympiad", "End Letter Missing", "Entirely Legitimate (Junior) Math Olympiad", "Earn Lots of MOney", "Easy Little Math Olympiad", "Every Little Mistake $\Longrightarrow$ 0", "Everybody Lives atMost Once", and "English Language Master's Open".

ELMO Shortlist Like the IMO Shortlist, the ELMO Shortlist consists of problems pro-posed for the ELMO.

IMO The International Mathematical Olympiad, the supreme high school mathematics contest. Started in 1959, it is the oldest of the international science olympiads. The IMO draws in over 100 countries every July, and each country sends at most six students. On each of two days of the contest, contestants face three problem over 4.5 hours—problems are scored out of 7 points, so the maximum score is 42.

IMO Shortlist The IMO Shortlist, consisting of problems proposed for the IMO. About 30 problems are selected from all proposals (usually more than 100) to form the IMO shortlist. Team leaders from each country then vote a few days in advance on which problems from the shortlist will be selected to appear on the IMO. The IMO Shortlist of year N is not public until after the IMO of year N + 1, as many countries use shortlist problems in their national team selection tests.

JMO Short for USAJMO.

NIMO The National Internet Math Olympiad is an online contest written by a small group of students. The winter olympiad (from which the problems here are taken) is a one-hour exam for teams of up to four, and consists of eight problems.

OMO The Online Math Open. The Online Math Open is another online contest also administered completely by some of the top students in the USA. Teams of up to four students are given about a week to answer several short-answer problems, ranging from very easy to extremely difficult.

MOP Mathematical Olympiad Summer Program. MOP is the training camp for the USA team for the IMO; students are selected based on performance at the USA(J)MO. Until 2014, the camp was generally held in Lincoln, Nebraska during June for 3.5 weeks. Four-hour tests are given regularly at MOP. Several problems from this text are taken from such exams.

Sharygin The Russian Sharygin Geometry Olympiad is an international contest consisting solely of geometry problems. All problems in this book are taken from the Sharygin correspondence round, where

students are given an extended period of time to submit solutions to several problems. Winners of the correspondence round are invited to Dubna, in Russia, for a final oral competition.

Shortlist See IMO Shortlist.

TST Abbreviation for Team Selection Test. Most countries use a TST as the final step in the selection of their team for the IMO.

USAJMO The USA Junior Mathematical Olympiad. It is an easier contest given at the same time as the USAMO for students in grades 10 and below. The format is identical to the USAMO.

USAMO USA Mathematical Olympiad. The USAMO is given to approximately 250 students each year, and used as part of the selection process for the USA team at the IMO, as well as for invitations to MOP. The format is identical to the IMO.

USA TST The Team Selection Test for the USA team. Up to 2011, the USA TST consisted of three days, each matching a day of the IMO. Since 2011 the TST has become more variable in its format, and is given only to the top eighteen students from the previous year's MOP.

USA TSTST The unfortunately-named "Team Selection Test for the Selection Team" is given at the end of MOP. It selects 18 students (the "selection team") to take further tests throughout the upcoming school year. The TSTST consists of two or three days, each matching the format of a day at the IMO.

Fuente: Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads, Evan Chen

Bibliografía.

Descarga la versión más actualizada del libro de teoría en
www.toomates.net/biblioteca/GeometriaAxiomatica.pdf

[Prob1] Problemas de Geometría Vol. 1
www.toomates.net/biblioteca/ProblemasGeometria1.pdf

[Prob2] Problemas de Geometría Vol. 2
www.toomates.net/biblioteca/ProblemasGeometria2.pdf

[Altizio] 100 Geometry Problems: Bridging the Gap from AIME to USAMO (David Altizio,2014)

[Andreescu] 103 Trigonometry Problems From the Training of the USA IMO Team (Titu Andreescu & Zuming Feng, 2005)